Variação Q-espectral inteira em apenas um lugar é impossível

Maria Aguieiras A. de Freitas, **Nair M. M. de Abreu**,
Programa de Engenharia de Produção, COPPE, UFRJ,
Rio de Janeiro, RJ
E-mail: maguieiras@im.ufrj.br, nair@pep.ufrj.br,

Renata Del-Vecchio
UFF - Instituto de Matemática
Niterói, RJ
E-mail: renata@vm.uff.br.

Resumo: *Recentemente, a matriz laplaciana sem sinal $Q(G) = D(G) + A(G)$ de um grafo simples $G = (V, E)$ com n vértices e m arestas, onde $D(G)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices de G e $A(G)$ sua matriz de adjacência, vem sendo muito estudada. Sejam $q_1 \geq \ldots \geq q_n$ os Q-autovalores do grafo, isto é, os autovalores da matriz laplaciana sem sinal de G. Se uma aresta é adicionada entre dois vértices não adjacentes de G, então os Q-autovalores do grafo resultante G', $q'_1 \geq \ldots \geq q'_n$, satisfazem $\sum q'_i = 2 + \sum q_i$. Neste trabalho nós mostramos que, se $n \geq 3$ e G é conexo, não pode ocorrer variação espectral inteira em apenas um lugar para a matriz laplaciana sem sinal, ou seja, que $q'_i \neq 2 + q_i, i = 1, \ldots, n$. Também apresentamos os principais resultados disponíveis na literatura referentes à variação espectral decorrente da adição de uma aresta quando a matriz considerada é a matriz de adjacência ou a matriz laplaciana de um grafo.*

1 Introdução

No que segue, vamos considerar $G = (V, E)$ um grafo simples, finito e não orientado em que $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto de n vértices e $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ é um conjunto de m arestas. A *matriz de adjacência de* G, $A(G) = [a_{ij}]$, é a matriz quadrada de ordem n, tal que $a_{ij} = 1$, se os vértices v_i e v_j são adjacentes e $a_{ij} = 0$ em caso contrário. Os autovalores de $A(G)$ são chamados *autovalores* de G e o *espectro* de G é o espectro de $A(G)$ denotado por $Sp\,(A(G)) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$, se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Logo, $A(G)$ é uma matriz simétrica com diagonal nula.

A *matriz laplaciana* de um grafo G é a matriz $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices de G, ou seja, $D(G) = diag\{d(v_1), \ldots, d(v_n)\}$, onde $d(v)$ denota o grau do vértice v. O espectro de $L(G)$ é a seqüência de seus autovalores denotado por $Sp\,(L(G)) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n)$, se $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n$. Os autovalores de $L(G)$ são chamados de *autovalores laplacianos* do grafo G. É fato conhecido que $L(G)$ é uma matriz semidefinida positiva e singular. Portanto, seus autovalores são todos não negativos e, ainda, $\mu_n = 0$. Além disso, G é um grafo desconexo se, e somente se, $\mu_{n-1} = 0$.

A *matriz laplaciana sem sinal* de um grafo G é a matriz $Q(G) = D(G) + A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices de G. A matriz laplaciana sem sinal $Q(G)$ foi introduzida no livro "Spectra of Graphs"[1], ocasião em que nenhuma denominação específica lhe foi atribuída. Muito recentemente ela vem sendo estudada na literatura e a maior parte dos resultados referentes a ela e seu espectro pode ser encontrada em [2], [7] e [9], que aliás são os únicos dedicados à matriz $Q(G)$, à exceção de alguns trabalhos de pesquisadores chineses, a grande maioria deles escrita em chinês, onde ela é denominada "*quasi-Laplacian matrix*". O $Q-$*espectro* de G é o espectro da matriz $Q(G)$ e é denotado por $Sp\ (Q(G)) = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n)$, se $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_{n-1} \geq q_n$. Os autovalores de $Q(G)$ são chamados de *Q-autovalores* do grafo G. A matriz $Q(G)$ é semidefinida positiva e, portanto, seus autovalores são todos não negativos.

Quando uma aresta é adicionada entre dois vértices não adjacentes de um grafo G, digamos v_1 e v_2 , os graus destes vértices são acrescidos de 1 no grafo resultante $G' = G + e$, onde $e = \{v_1, v_2\}$. O problema de determinar as alterações que ocorrem nos espectros das matrizes laplaciana e de adjacência do grafo G pela adição da aresta $e = \{v_1, v_2\}$ tem sido estudado e os mais importantes resultados disponíveis na literatura estão reunidos nas Seções 3 e 4, respectivamente. Antes, porém, revemos alguns resultados de Teoria de Matrizes necessários à compreensão do texto. Na última seção deste trabalho apresentamos os resultados que obtivemos para a matriz laplaciana sem sinal.

2 Resultados básicos de Teoria de Matrizes

Como referência para os resultados desta seção podemos citar [4]. Para uma matriz quadrada X, representamos seus autovalores por $\lambda_i(X)$, ou simplesmente por λ_i.

Teorema 2.1. *(Quociente de Rayleigh-Ritz) Seja X uma matriz simétrica e sejam λ_{max} e λ_{min} o maior e o menor autovalores de X, respectivamente . Então:*

$$\lambda_{max} = \max_{\mathbf{u}\neq 0} \frac{\mathbf{u}^T X \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \mathbf{u}^T X \mathbf{u},$$

$$\lambda_{min} = \min_{\mathbf{u}\neq 0} \frac{\mathbf{u}^T X \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \min_{\|\mathbf{u}\|=1} \mathbf{u}^T X \mathbf{u}.$$

Teorema 2.2. *(Weyl) Sejam X e Y matrizes simétricas $n\times n$ e sejam $\lambda_i(X)$, $\lambda_i(Y)$ e $\lambda_i(X+Y)$ os autovalores arranjados em ordem não decrescente. Para cada $k = 1, \ldots, n$ temos que*

$$\lambda_k(X) + \lambda_1(Y) \leq \lambda_k(X+Y) \leq \lambda_k(X) + \lambda_n(Y)$$

Uma matriz simétrica M de ordem n é denominada *semidefinida positiva* se $x^T M x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Uma matriz simétrica M de ordem n é semidefinida positiva se, e somente se, todos os seus autovalores são maiores ou iguais a 0.

Corolário 2.3. *Sejam X e Y matrizes simétricas $n\times n$. Suponhamos que Y seja semidefinida positiva e que os autovalores de X e de $X+Y$ estejam arranjados em ordem não decrescente. Então,*

$$\lambda_k(X) \leq \lambda_k(X+Y),\ k = 1, \ldots, n.$$

Se p é uma permutação em $\{1, 2, \ldots, n\}$, representamos por X_p a matriz $[x'_{ij}]$ tal que $x'_{ij} = x_{p(i)\,p(j)}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Dizemos que uma matriz X quadrada é *redutível* se ou $n = 1$ e $X = 0$, ou $n \geq 2$ e existe permutação p tal que $X_p = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$, com B e D matrizes quadradas. Caso contrário, dizemos que a matriz X é *irredutível*.

Uma matriz X é denominada *não negativa* se suas entradas são números reais não negativos. Denotamos uma matriz X não negativa por $X \geq 0$.

Teorema 2.4. *Toda matriz $X \geq 0$ possui um autovalor $\rho \geq 0$ com um autovetor associado u não negativo, isto é, $u \geq 0$. Além disso, para todo λ autovalor de X, $|\lambda| \leq \rho$.*

Teorema 2.5. *(Teorema de Perron-Frobenius) Seja $X \geq 0$ uma matriz simétrica, irredutível e com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Então:*

1. *$\lambda_1 > 0$ e associado a este autovalor existe um autovetor positivo;*
2. *$\lambda_1 > \lambda_2$;*
3. *$|\lambda_i| \leq \lambda_1$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

O autovalor máximo no Teorema 2.5 é denominado *raio espectral* da matriz M.

Proposição 2.6. *Seja X uma matriz irredutível não negativa de ordem n. Então, para toda matriz $Y \geq 0$ de ordem n, $X+Y$ é irredutível e, além disso, $\lambda_{max}(X+Y) > \lambda_{max}(X)$, se $Y \neq 0$.*

3 Variação espectral inteira para a matriz laplaciana

Quando uma aresta $e = \{v_1, v_2\}$ é adicionada entre dois vértices não adjacentes v_1 e v_2 de um grafo G, temos que a matriz laplaciana do grafo resultante $G' = G + e$ satifaz $L(G') = L(G) + K$, onde

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus 0_{n-2},$$

onde 0_{n-2} é a matriz nula de ordem $n-2$. É fácil ver que $K = [e_1 - e_2][e_1 - e_2]^T$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim, seu espectro é $(2, 0, \ldots, 0)$. Uma vez que K é semidefinida positiva, em virtude do Corolário 2.3, nenhum autovalor de $L(G)$ pode decrescer quando a aresta $e = \{v_1, v_2\}$ é adicionada ao grafo G. Além disso, quando a aresta $e = \{v_1, v_2\}$ é adicionada a G, os graus destes vértices são acrescidos de 1 no grafo resultante G'. Logo, o traço de $L(G')$ é igual ao traço de $L(G)$ acrescido de 2, ou seja, $tr\ L(G')$ $= tr\ L(G) + 2$. Portanto, se $\mu_1' \geq \mu_2' \geq \ldots \geq \mu_{n-1}' \geq \mu_n' \geq 0$ são os autovalores laplacianos de G' , então $\sum \mu_i' = 2 + \sum \mu_i$.

Exemplo 3.1. *A Figura 1 mostra os grafos G, G' e G'' cujos espectros laplacianos são $Sp\,(L(G)) = (2+\sqrt{2}, 2, 2-\sqrt{2}, 0)$, $Sp\,(L(G')) = (4, 3, 1, 0)$ e $Sp\,(L(G'')) = (4, 2, 2, 0)$. Observemos que G' e G'' são grafos obtidos de G por adição de uma só aresta a cada um deles e estas são distintas, dado que os grafos não são isomorfos. No primeiro caso, todos os 3 autovalores laplacianos não nulos de G sofreram acréscimos enquanto no segundo, apenas 2 autovalores de $L(G)$ foram alterados, após as inserções das respectivas arestas.*

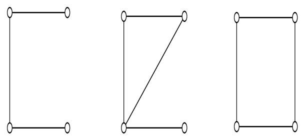

Figura 1: G' e G'' são obtidos de G pela adição de arestas diferentes

Exemplo 3.2. *Na Figura 2 estão representados os grafos G_1, G_2 e G_3, com G_{i+1} obtido de G_i pela adição de uma aresta, $i = 1, 2$. Seus espectros laplacianos são $Sp\,(L(G_1)) = (4, 3, 1, 0)$, $Sp\,(L(G_2)) = (4, 4, 2, 0)$ e $Sp\,(L(G'')) = (4, 4, 4, 0)$. Observemos que 2 autovalores de $L(G_1)$ sofreram acréscimos de 1 quando G_2 foi formado, enquanto que um único autovalor de $L(G_2)$ foi acrescido de 2 ao ser inserida a aresta para obter G_3.*

Em 1999, W. So[8] apontou para o problema de determinar sob que circunstâncias a adição de uma aresta a um grafo causaria alteração

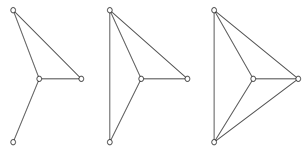

Figura 2: G_1, G_2 e G_3 são obtidos seqüencialmente pela adição de arestas

nos autovalores laplacianos apenas por quantidades inteiras. É claro que isto só poderia ocorrer em duas situações: ou um autovalor é acrescido de 2 ou dois autovalores são acrescidos de 1. No primeiro caso, dizemos que ocorre *variação espectral inteira em um lugar pela adição de uma aresta* e, no segundo, *variação espectral inteira em dois lugares pela adição de uma aresta.* Tal denominação foi introduzida por Fan[3] e por Kirkland[5].

So[8] caracterizou a ocorrência de variação espectral inteira em um lugar pela adição de uma aresta para a matriz laplaciana:

Teorema 3.3 ([8])**.** *Seja G um grafo com vértices $1, 2, \ldots, n$. Suponhamos que os vértices 1 e 2 não são adjacentes. Seja $H = G + e$, onde $e = \{1, 2\}$. Então, a variação espectral inteira ocorre em um lugar se, e somente se, os vértices 1 e 2 têm os mesmos vizinhos. Neste caso, o autovalor de G que aumenta de 2 é dado pelo grau do vértice 1.*

Em 2004, Kirkland[5] caracterizou a ocorrência de variação espectral inteira em dois lugares pela adição de uma aresta para a matriz laplaciana:

Teorema 3.4 ([5])**.** *Seja G um grafo com n vértices com matriz laplaciana L dada por*

$$L = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ 0 & d_2 & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix},$$

onde os blocos $L_{11}, \ldots, L_{44}$ são de tamanhos $d_1 - t$, $d_2 - t$, t e $n - 2 - d_1 - d_2 + t$, respectivamente. Suponhamos que $d_1 \geq d_2$. Formemos $\widehat{G}$ a partir de G por adição de uma aresta entre os vértices 1 e 2. Então a variação espectral inteira ocorre em dois lugares sob a adição dessa aresta se, e somente se, as seguintes condições são satis-

feitas:

$$\begin{array}{rcl} L_{11}\mathbf{1} - L_{12}\mathbf{1} & = & (d_2+1)\mathbf{1}; \\ L_{21}\mathbf{1} - L_{22}\mathbf{1} & = & -(d_1+1)\mathbf{1}; \\ L_{31}\mathbf{1} - L_{32}\mathbf{1} & = & -(d_1-d_2)\mathbf{1}; \\ L_{41}\mathbf{1} - L_{42}\mathbf{1} & = & 0. \end{array} \quad (1)$$

No caso em que as condições acima são satisfeitas, os dois autovalores de L alterados sob a adição da aresta são

$$\lambda_{i_1} = \frac{d_1+d_2+1-\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}}{2}$$

e

$$\lambda_{i_2} = \frac{d_1+d_2+1+\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}}{2},$$

e os vetores

$$u_1 = \begin{bmatrix} d_2+1-\lambda_{i_1} \\ \lambda_{i_1}-d_1-1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \; e \; u_2 = \begin{bmatrix} d_2+1-\lambda_{i_2} \\ \lambda_{i_2}-d_1-1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

são autovetores de L correspondendo a λ_{i_1} e λ_{i_2}, respectivamente.

Desta forma o problema colocado por So[8] ficou completamente resolvido.

4 Variação espectral inteira para a matriz de adjacência

Uma vez que o traço de uma matriz de adjacência é sempre nulo, a soma de seus autovalores também é. Logo, não pode ocorrer alteração em apenas um autovalor de $A(G)$ quando uma aresta é adicionada entre vértices não adjacentes de um grafo G. Portanto, *não pode ocorrer variação espectral inteira em um lugar pela adição de uma aresta para a matriz de adjacência.*

Quando uma aresta $e = \{v_1, v_2\}$ é adicionada entre dois vértices não adjacentes v_1 e v_2 de um grafo G, temos que a matriz de adjacência do grafo resultante G' satifaz $A(G') = A(G) + K$, onde

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus 0_{n-2},$$

cujo espectro é $(1, 0, \ldots, 0, -1)$. Observemos que, uma vez que K não é semidefinida positiva, o Corolário 2.3 não se aplica.

Em 2005, Pan *et al.*[6] estudaram a ocorrência de variação espectral racional em dois lugares para a matriz de adjacência e provaram o seguinte resultado:

Teorema 4.1 ([6])**.** *Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e seja G' um grafo conexo obtido de G pela adição de uma nova aresta. Então, a variação espectral racional para a matriz de adjacência não ocorrerá em dois lugares.*

Desta forma, ficou provado que não pode ocorrer variação espectral inteira pela adição de uma aresta para a matriz de adjacência em grafos conexos com pelo menos 3 vértices.

5 Variação Q-espectral inteira

Ao adicionarmos a aresta $e = \{v_1, v_2\}$ entre dois vértices não adjacentes v_1 e v_2 de um grafo G, os graus destes vértices são acrescidos de 1 no grafo resultante $G' = G+e$. Logo, como no caso da matriz laplaciana, o traço da matriz $Q(G')$ é igual ao traço da matriz $Q(G)$ acrescido de 2, ou seja, $tr\ Q(G') = tr\ Q(G) + 2$. Portanto, se $q'_1 \geq q'_2 \geq \ldots \geq q'_{n-1} \geq q'_n \geq 0$ são os Q-autovalores de G' , então $\sum q'_i = 2 + \sum q_i$. Observemos que $Q(G') = Q(G) + H$, onde

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \oplus 0_{n-2}.$$

Ou seja, $H = [e_1 + e_2][e_1 + e_2]^T$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Como H é uma matriz semidefinida positiva e seu traço é igual a 2, em virtude do Corolário 2.3, nenhum autovalor de $Q(G)$ pode decrescer quando a aresta $e = \{v_1, v_2\}$ é adicionada ao grafo G.

Exemplo 5.1. *A Figura 3 mostra os grafos G e G', onde G' é obtido de G por adição de uma aresta. Seus respectivos Q-espectros são $Sp(Q(G)) = (2+\sqrt{2}, 2, 2-\sqrt{2}, 0)$ e $Sp\ (Q(G')) = (\frac{5+\sqrt{17}}{2}, 2, 1, \frac{5-\sqrt{17}}{2})$. Observemos que apenas um dos Q-autovalores de G não sofreu acréscimo pela adição da aresta.*

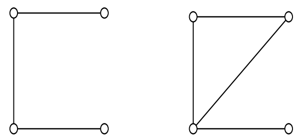

Figura 3: G' é obtido de G pela adição de uma aresta

Analogamente ao que foi realizado para as matrizes laplaciana e de adjacência, estamos interessados em estudar a ocorrência de alteração nos Q-autovalores apenas por quantidades inteiras quando da adição de uma aresta a um grafo. Se um dos Q-autovalores é acrescido de 2 ou se dois Q-autovalores são acrescidos de 1, dizemos, respectivamente, que ocorreu uma *variação Q-espectral inteira em um lugar pela adição de uma aresta* ou uma *variação Q-espectral inteira em dois lugares pela adição de uma aresta.*

Exemplo 5.2. *Os grafos G_1 e G_2 mostrados na Figura 4 ilustram a ocorrência de variação Q-espectral inteira em dois lugares, e seus Q-espectros são, respectivamente, $Sp\,(Q(G_1)) = (5,4,2,1,1,1)$ e $Sp\,(Q(G_2)) = (6,4,2,2,1,1)$.*

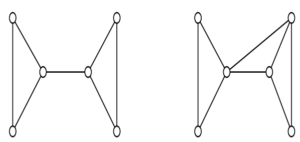

Figura 4: G_2 é obtido de G_1 pela adição de uma aresta

Um grafo G é dito *Q-integral* quando todos os seus Q- autovalores são números inteiros (veja [7] e [9]). Observemos que, se o grafo G for Q-integral e ocorrer uma variação Q-espectral inteira ao adicionarmos uma aresta e a ele, então o grafo $G+e$ também será Q-integral. Os grafos G_1 e G_2 mostrados na Figura 4 são ambos Q-integrais.

O resultado a seguir mostra a impossibilidade de ocorrer variação Q-espectral inteira em um lugar pela adição de uma aresta em grafos conexos com mais de 2 vértices.

Teorema 5.3. *Seja G um grafo conexo com $n \geq 3$ vértices e sejam v_1 e v_2 dois vértices não adjacentes em G. Então, não pode ocorrer uma variação Q-espectral inteira em um lugar ao adicionarmos a aresta $e = \{v_1, v_2\}$ ao grafo G.*

Prova:

Sejam G um grafo conexo com $n \geq 3$ vértices e $G' = G + e$. Então, $Q' = Q(G') = Q(G) + [e_1+e_2][e_1+e_2]^T$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Como G é conexo, temos que a matriz $Q(G) \geq 0$ é irredutível. Logo, pela Proposição 2.6, temos que o raio espectral de $Q(G)$ aumenta quando qualquer entrada da matriz $Q(G)$ cresce. Portanto, se houver uma variação Q-espectral inteira em um lugar, q_1 deve aumentar de 2.

Assim, se $u > 0$ é um autovetor de Q' associado ao seu raio espectral q_1', pelo Teorema 2.1, temos que

$$\begin{aligned} q_1 + 2 = q_1' &= \frac{u^T\,Q'\,u}{u^T\,u} = \\ &= \frac{u^T\,(Q+[e_1+e_2][e_1+e_2]^T)\,u}{u^T\,u} \\ &= \frac{u^T\,Q\,u}{u^T\,u} + \frac{u^T\,[e_1+e_2][e_1+e_2]^T\,u}{u^T\,u} \\ &\leq q_1 + \lambda_{max}([e_1+e_2][e_1+e_2]^T) = q_1 + 2, \end{aligned}$$

onde $\lambda_{max}([e_1+e_2][e_1+e_2]^T)$ é o raio espectral da matriz $[e_1+e_2][e_1+e_2]^T$.

Logo, u é um autovetor de $Q(G)$ associado ao seu raio espectral q_1 e um autovetor da matriz $[e_1+e_2][e_1+e_2]^T$ associado ao seu raio espectral. Segue que u é múltiplo escalar de e_1+e_2, o que contradiz o Teorema 2.5, uma vez que, para $n \geq 3$, u tem coordenada nula. $\diamond$

Como conseqüência do Teorema 5.3, temos que, se ocorrer variação Q-espectral inteira ao adicionarmos uma aresta a um grafo conexo G com pelo menos 3 vértices, ela se dará em dois lugares e um dos autovalores acrescidos de 1 será necessariamente q_1, o raio espectral da matriz $Q(G)$.

Observação: É fato conhecido que 0 é Q-autovalor de um grafo G se, e somente se, G é bipartido (veja [2]). Portanto, se G for um grafo bipartido, o autovalor q_n sofrerá acréscimo devido à inserção de uma aresta no grafo G se, e somente se, o grafo resultante G' não for bipartido, ou seja, se e somente se, G' contever ciclos de comprimento ímpar. Os G e G'' mostrados na Figura 1 são ambos bipartidos, enquanto que o grafo G' não é bipartido. Seus Q-espectros são $Sp\,(Q(G)) = (2+\sqrt{2}, 2, 2-\sqrt{2}, 0)$, $Sp\,(Q(G')) = (\frac{5+\sqrt{17}}{2}, 2, 1, \frac{5-\sqrt{17}}{2})$ e $Sp\,(Q(G'')) = (4,2,2,0)$.

Agradecimento: O segundo autor desenvolveu este trabalho graças ao auxílio do CNPq dado pelo Projeto 300563/94- 9(NV). Os autores gostariam de agradecer ao Prof. Steve Kirkland (University of Regina, Canada) por suas sugestões para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

[1] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, "Spectra of Graphs - Theory and Applications", 3^a ed., Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg-Leipzig, 1995.

[2] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, Signless Laplacian of finite graphs, *Linear Algebra and its Applications* 423 (2007) 155-171.

[3] Y. Fan, On spectral integral variation of graphs, *Linear and Multilinear Algebra* 50 (2002) 133-142.

[4] R. A. Horn, C. R. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge Univ. Press, New York, 1992.

[5] S. Kirkland, A characterization of spectral integral variation in two places for Laplacian matrices, *Linear and Multilinear Algebra* 52 (2004) 79-98.

[6] Y.-L. Pan, Y. Fan, J. Li, Spectral rational variation in two places for adjacency matrix is impossible, *Linear Algebra and its Applications* 404 (2005) 275-282.

[7] S. Simić, Z. Stanić, Q-integral graphs with edge-degrees at most five, *Discrete Math.* (2007), doi:10.1016/j.disc.2007.08.055.

[8] W. So, Rank one pertubation and its application to the Laplacian spectrum of a graph, *Linear and Multilinear Algebra* 46 (1999) 193-198.

[9] Z. Stanić, There are exactly 172 connected Q-integral graphs up to 10 vertices, *Novi Sad J. Math.* Vol. 37, No. 2 (2007) 193-205.