Construções de Reticulados Algébricos via Subcorpos Maximais Reais de Corpos Ciclotômicos

Antonio Aparecido de Andrade
Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: andrade@ibilce.unesp.br

Agnaldo José Ferrari *
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13081-900, Campinas, SP
E-mail: agnaldoferrari@ig.com.br.

1 Introdução

Um empacotamente esférico é a disposição de esferas de mesmo raio no espacço euclidiano n-dimensional de tal modo que a interseção de duas delas tenha no máximo um ponto. Um problema associado ao empacotamento esférico é o de dispor essas esferas no espacço, de modo que elas ocupem a maior fração desse espaço, ou seja, que esta distribuição tenha alta densidade. Devido à importância dessa questão, durante o *Congresso Internacional de Matemática* em Paris no ano de 1900, David Hilbert citou-o como sendo o 18º Problema de uma seleta lista de desafios que viriam ocupar lugar de destaque no desenvolvimento da ciência moderna.

Dentre os empacotamentos esféricos, aqueles cujo conjunto formado pelos centros das esferas constituem um subgrupo discreto do $\mathbb{R}^n$, despertaram particular interesse e passaram a se chamar de empacotamentos reticulados. Com isso, o problema se transformou na procura de reticulados com alta densidade de centro.

Fazendo uso do anel dos inteiros de subcorpos maximais reais dos corpos ciclotômicos apresentamos novas construções de reticulados no $\mathbb{R}^n$ obtidos via o homomorfismo de Minkowski com densidade de centro máxima que são versões rotacionadas de reticulados conhecidos na literatura.

Neste trabalho, apresentamos inicialmente os conceitos básicos envolvendo corpos de números, reticulados e o homomorfismo canônico, e vemos que através deste último, temos um método de gerar reticulados no $\mathbb{R}^n$. Os reticulados obtidos desta maneira dependem diretamente do anel dos inteiros algébricos de um corpo de números. Deste modo, na Seção 2, fazemos uma breve revisão de alguns conceitos básicos da teoria algébrica dos números [5] necessária para o desenvolvimento das demais seções. Na Seção 3, apresentamos uma forma quadrática via subcorpos maximais reais de corpos ciclotômicos, que é útil para a determinação da densidade de centro de um reticulado algébrico. Na Seção 4, apresentamos o conceito do homomorfismo de Minkowski, a geração de reticulados algébricos via este homomorfismo, e também propriedades importantes sobre a densidade de centro envolvendo este homomorfismo. Finalizando, esta seção, apresentamos novos exemplos de reticulados algébricos com densidade de centro máxima, via subcorpos maximais reais de corpos ciclotômicos. Na Seção 5, damos nossas conclusões.

2 Preliminares

Nesta seção, faremos uma breve revisão de alguns conceitos básicos da teoria algébrica dos números [5] necessária para o desenvolvimento das demais seções.

Definição 1 *Um corpo de números $\mathbb{L}$ é qualquer extensão finita de $\mathbb{Q}$.*

Seja $\mathbb{L}$ um corpo de números de grau n, ou seja, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de um polinômio mônico irredutível $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. As n

*Aluno de doutorado

raízes distintas de $p(x)$, a saber, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, são chamadas de conjugados de α. Além disso, se $\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{C}$ é um $\mathbb{Q}$-homomorfismo então $\sigma(\alpha_i)$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ é uma raiz de $p(x)$. Deste modo, os $\mathbb{Q}$-homomorfismos de $\mathbb{L}$ são definidos por $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Se todos os $\mathbb{Q}$-homomorfismos de $\mathbb{L}$ s ao reais (resp., complexos), dizemos que $\mathbb{L}$ é um corpo totalmente real (resp., totalmente complexo).

Definição 2 *Seja $\mathbb{L}$ um corpo de números. A norma e o traço de um elemento $\alpha \in \mathbb{L}$ são definidos como*

$$N_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha) \text{ e } Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha).$$

Definição 3 *Seja o conjunto $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \{\alpha :$ existe um polinômio mônico $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(\alpha) = 0\}$. O conjunto $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ é chamado anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$.*

O anel $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ considerado como um $\mathbb{Z}$-módulo tem uma base $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ [5]. Em outras palavras, todo elemento $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ pode ser escrito de modo único como $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Definição 4 *Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ uma base de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ como um $\mathbb{Z}$-módulo. O inteiro $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = \det((Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha_i\alpha_j))_{i,j=1}^{n})$ é chamado de discriminante de $\mathbb{L}$.*

Definição 5 *Seja $\mathcal{A}$ um ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$. A norma de $\mathcal{A}$ é definida como $N_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A}) = \mid \mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathcal{A} \mid$. Além disso, se $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ é um ideal principal, então $N_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A}) = \mid N_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha) \mid$.*

Definição 6 *Seja n um inteiro positivo. Dizemos que ξ_n é uma raiz n-ésima da unidade se $\xi_n^n = 1$, e que ξ_n é uma raiz n-ésima primitiva da unidade se $\xi_n^n = 1$ e $\xi_n^m \neq 1$ para todo $1 \leq m \leq n-1$. O corpo $\mathbb{Q}(\xi_n)$ é chamado corpo ciclotômico.*

Teorema 1 *[6] Se n é um inteiro positivo, ξ_n uma raiz n-ésima primitiva da unidade, e $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\xi_n)$ o corpo ciclotômico correspondente, então*

1. *$[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = \phi(n)$, onde ϕ é a função de Euler,*
2. *$\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[\xi_n]$ e é uma base de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ é dada por $\{1, \xi_n, \xi_n^2, \cdots, \xi_n^{\phi(n)-1}\}$*
3. *$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$ é o subcorpo maximal real de $\mathbb{L}$,*
4. *$\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\xi_n + \xi_n^{-1}]$ e uma base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é dada por $\{\xi_n + \xi_n^{-1}, \xi_n^2 + \xi_n^{-2}, \cdots, \xi_n^{\frac{\phi(n)}{2}} + \xi_n^{-\frac{\phi(n)}{2}}\}$.*

Teorema 2 *[6] Se n é um inteiro positivo, ξ_n uma raiz n-ésima primitiva da unidade, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\xi_n)$ então $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} = (-1)^{\phi(n)/2} \frac{n^{\phi(n)}}{\prod_{p|n} p^{\phi(n)/(p-1)}}$.*

3 Formas quadráticas sobre $\mathbb{K}$

Seja ξ_n uma raiz n-ésima primitiva da unidade, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\xi_n)$ o correspondente corpo ciclotômico e $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$.

Observação 1 *Se $\alpha = a_0 + a_1\xi_n + \cdots + a_{\phi(n)-1}\xi_n^{\phi(n)-1}$ é um elemento de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ então $\overline{\alpha} = a_0 + a_1\xi_n^{-1} + \cdots + a_{\phi(n)-1}\xi_n^{-\phi(n)+1}$. Assim*

$$\begin{aligned}
\alpha\overline{\alpha} &= (a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{\phi(n)-1}^2) \\
&+ (a_0a_1 + \cdots + a_{\phi(n)-2}a_{\phi(n)-1})(\xi_n + \xi_n^{-1}) \\
&+ (a_0a_2 + \cdots + a_{\phi(n)-3}a_{\phi(n)-1})(\xi_n^2 + \xi_n^{-2}) \\
&+ \cdots + a_0a_{\phi(n)-1}(\xi_n^{\phi(n)-1} + \xi_n^{-\phi(n)+1}),
\end{aligned}$$

ou seja, $\alpha\overline{\alpha} = A_0 + \sum_{i=1}^{\phi(n)-1} A_i\alpha_i$, onde $\alpha_i = \xi_n^i + \xi_n^{-i}$, para todo $i = 1, 2, \cdots, \phi(n) - 1$ e $A_j = \sum_{i=0}^{\phi(n)-j} a_ia_{j+i}$, para todo $j = 0, 1, \cdots, \phi(n) - 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}) &= Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(A_0 + \sum_{i=1}^{\phi(n)-1} A_i\alpha_i) \\
&= \phi(n)A_0 + \sum_{i=1}^{\phi(n)-1} A_iTr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha_i) \\
&= \phi(n)A_0 + 2\sum_{i=1}^{\phi(n)-1} A_iTr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\xi_n^i),
\end{aligned}$$

uma vez que $Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha_i) = 2Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\xi_n)$, para todo $i = 1, 2, \cdots, \phi(n) - 1$. Além disso, se $mdc(k, n) = 1$ então $Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\xi_n) = Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\xi_n^k)$.

Definição 7 *A função de Möebius μ é definida por*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ (-1)^k \text{ se } n \text{ é o produto de } k \text{ primos distintos} \\ 0 \text{ se } n \text{ é divisível por um quadrado de um primo.} \end{cases}$$

Teorema 3 *[4] Se* $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$, $P = \prod_{i=1}^{m} p_i$, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\xi_n)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ *é o anel dos inteiros algébricos de* $\mathbb{L}$ *e* $\alpha = \sum_{i=0}^{\phi(n)-1} a_i \xi_n^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ *então*

$$Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}) = \frac{2n}{P}[\frac{\phi(P)}{2} \sum_{i=1}^{\phi(n)-1} a_i^2 + $$
$$+\mu(P) \sum_{i=1}^{\phi(P)-1} A_{\frac{n}{P}i} \phi((i,P))\mu((i,P))],$$

onde μ *é a função de Möebius e* ϕ *é a função de Euler.*

Teorema 4 *[2] Seja* $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$, *onde* $a_j \geq 1$, *para todo* $j = 1, 2, \ldots s$, *e* $m = \phi(n)$. *Se* $\alpha = a_1(\xi_n + \xi_n^{-1}) + \cdots + a_{\frac{\phi(n)}{2}}(\xi_n^{\frac{\phi(n)}{2}} + \xi_n^{-\frac{\phi(n)}{2}})$ *é um inteiro algébrico de* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$, *então*

$$Tr_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}) = m\sum_{i=1}^{m/2} a_i^2 +$$
$$+\frac{n}{P}\left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\substack{i=r \\ \frac{n}{P}i:par}}^{\phi(P)} \rho(t_i) a^2_{\frac{n}{2P}i} + 2\sum_{i=1}^{s} \rho(t_i) A_{\frac{n}{P}i} + \\ \displaystyle +2\sum_{i=q}^{\phi(P)-1} \rho(t_i) B_{\frac{n}{P}i} \end{array}\right),$$

onde $P = p_1 \cdots p_s$, $t_i = mdc(i, P)$, *para todo* $i = 1, 2, \cdots, \phi(P) - 1$, $\lceil x \rceil$ *(respectivamente,* $\lfloor x \rfloor$*) denota o inteiro mais próximo, maior (respectivamente, menor) ou igual que* x, $r = \left\lceil \frac{2P}{n} \right\rceil$, $s = \left\lfloor \frac{phi(P)}{2} - 1 \right\rfloor$, $q = \left\lceil \frac{3P}{n} \right\rceil$, $\rho(t_i) = \mu(\frac{P}{t_i})\phi(t_i)$, μ *(respectivamente,* ϕ*) é a função de Möebius (respectivamente, Euler),* $A_j = a_1 a_{j+1} + a_2 a_{j+2} + \ldots + a_{\frac{m}{2}-j} a_{\frac{m}{2}}$, $B_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-k\leq\frac{m}{2}}}^{m/2} a_k a_{j-k}$, *para todo* $j + 1, 2, \cdots, \frac{m}{2} - 1$, *e* $\overline{\alpha}$ *é a conjugação complexa de* α.

Observação 2 *[2] A forma quadrática no subcorpo maximal real de* $\mathbb{Q}(\xi_n)$, *dada no Teorema 4, possui importantes aplicações, tais como*

1. *investigar a densidade de empacotamento de reticulados em dimensões ímpares.*

2. *construir reticulados algébricos via ideais contidos no anel dos inteiros algébricos de* $\mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$ *que são versões rotacionadas de reticulados conhecidos.*

4 Reticulados Algébricos

Nesta seção, apresentamos o método de Minkowski, para a geração de reticulados no $\mathbb{R}^n$ via ideais do anel de inteiros de um corpo de números. Neste trabalho, tais reticulados, serão chamados de reticulados algébricos.

Definição 8 *Seja* $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ *um conjunto de vetores linearmente independente do* $\mathbb{R}^n$. *Assim* $m \leq n$. *O subgrupo aditivo* Λ *do* $(\mathbb{R}^n, +)$ *gerado por* $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ *é chamado de reticulado de dimensão* m *do* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1 *Como um exemplo temos o reticulado* $A_n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} x_i = 0\}$, $n \geq 1\}$.

Sejam $\mathbb{L}$ um corpo de números de grau n, e $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ os $\mathbb{Q}$-homomorfismos de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{C}$, ordenados de tal modo que σ_i é real para $i = 1, 2, \cdots, r_1$ e σ_{j+r_2} é a conjugação complexa de σ_j para $j = r_1+1, r_1+2, \cdots, r_1+r_2$. Denotamos por $\mathcal{R}(z)$ e $\mathcal{I}(z)$, as partes real e imaginária do número complexo z, respectivamente.

Definição 9 *O homomorfismo de grupos* $\sigma_{\mathbb{L}} : \mathbb{L} \to \mathbb{R}^n$ *definido por*

$$\sigma_{\mathbb{L}}(\alpha) = (\sigma_1(\alpha), \cdots, \sigma_{r_1}(\alpha), \mathcal{R}(\sigma_{r_1+1}(\alpha)),$$
$$\mathcal{I}(\sigma_{r_1+1}(\alpha)), \cdots, \mathcal{R}(\sigma_{r_1+r_2}(\alpha)), \mathcal{I}(\sigma_{r_1+r_2}(\alpha))),$$

onde $\alpha \in \mathbb{L}$, *é chamado de homomorfismo canônico (ou Minkowski).*

Sejam $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ o anel dos inteiros algébricos $\mathbb{L}$, e $\mathcal{A}$ um ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$.

Teorema 5 *[5] O conjunto* $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ *é um reticulado de dimensão* n *no* $\mathbb{R}^n$ *cujo volume é dado por*

$$v(\sigma_{\mathbb{L}}(M)) = 2^{r_2} N_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{D}_{\mathbb{L}} \mid^{1/2}.$$

Proposição 1 *[1] Se* $\alpha \in \mathbb{L}$ *então*

$$\mid \sigma_{\mathbb{L}}(\alpha) \mid^2 = c_L Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}),$$

onde

$$c_{\mathbb{L}} = \begin{cases} 1, \text{ se, } \mathbb{L}, \text{ é totalmente real} \\ \frac{1}{2}, \text{ se, } \mathbb{L}, \text{ é totalmente complexo,} \end{cases}$$

e $\overline{\alpha}$ *é a conjugação complexa de* α.

Sendo $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um reticulado e $\alpha \in \mathcal{A}$, temos que

$$| \sigma_{\mathbb{L}}(\alpha) |^2 = \frac{1}{2} Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}),$$

e

$$\rho = \frac{1}{2} min\{| \sigma_{\mathbb{L}}(\alpha) | : \alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq 0\}$$

é chamado raio de empacotamento de $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$. Assim, a densidade de centro de $\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})$ é dada por

$$\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{2^{r_2}\rho^n}{| \mathcal{D}_{\mathbb{L}} |^{1/2} N_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A})}.$$

Se $t = min\{Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}) : \alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq 0\}$ então

$$\delta(\sigma_{\mathbb{L}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n | \mathcal{D}_{\mathbb{L}} |^{1/2}} \frac{t^{n/2}}{N_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A})}.$$

Exemplo 2 *Sejam o corpo* $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\xi_{12})$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1})$ *seu subcorpo maximal real e* $\mathcal{A} = ((\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 3(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ *um ideal de* $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}]$. *Temos que* $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = n = 2$, $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A}) = 6$ *e* $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = 12$. *Se* $\alpha = ((\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 3(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2})(a_0(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + a_1(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}) \in \mathcal{A}$, *onde* $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, *então* $Tr_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}) = 72a_0^2 + 24a_1^2 + 72a_0a_1$. *Assim* $t = min\{Tr_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\alpha\overline{\alpha}) : \alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq 0\} = 24$ *(com* $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$*) e portanto*

$$\delta(\sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})) = \frac{1}{2^n | \mathcal{D}_{\mathbb{K}} |^{1/2}} \frac{t^{n/2}}{N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathcal{A})} \simeq 0,28868.$$

Assim o reticulado algébrico $\sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ *tem a mesma densidade que o reticulado* A_2.

De modo análogo, temos que os reticulados $\sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1})$, da tabela seguinte possuem a mesma densidade de centro do reticulado A_2.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{N}(\mathcal{A})$	t
$(-19(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 33(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	6	24
$(71(i_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 123(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	6	24
$(10(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 18(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	24	96
$(2(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) - 6(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	24	96
$(-38(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) - 66(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	24	96
$(4(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) - 12(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	96	384
$(-20(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 36(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	96	384
$(8(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) - 24(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	384	1536
$(-40(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) - 72(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	384	1536
$(-16(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 48(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	1536	6144
$(80(\xi_{12} + \xi_{12}^{-1}) + 144(\xi_{12}^2 + \xi_{12}^{-2}))\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	1536	6144

5 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos vários novos exemplos de reticulados algébricos, obtidos via o homomorfismo de Minkowski, com densidade de centro record que são versões rotacionadas dos reticulados A_2. A utilização de subcorpos de corpos ciclotômicos é um dos caminhos que podemos utilizar para a obtenção de reticulados algébricos com densidade de centro record em dimensões ímpares.

6 Agradecimentos

Agradecemos a FAPESP pelo apoio com os seguintes processos 2002/07473 – 7 e 2005/04177 – 6

Referências

[1] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, “Sphere packing, lattices and groups”, Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] A.J. Ferrari, “Reticulados algébricos via corpos abelianos, Dissertação de Mestrado, Ibice - Unesp, São José do Rio Preto - SP, 2008.

[3] A.L. Flores, “Representação geométrica de ideais de corpos de números”, Dissertação de Mestrado, Imecc - Unicamp, Campinas - SP, 1996.

[4] T.M. Rodrigues, “Cubicas Galoisianas”, Dissertação de Mestrado, Ibilce - Unesp, São José do Rio Preto - SP, 2003.

[5] P. Samuel, “Algebraic theory of numbers”, Hermann, Paris, 1967.

[6] L. Washington, “Introduction to cyclotomic fields”, Springer-Verlag, New York, 1982.