Teorema de Adição para as Funções de Mittag-Leffler

Rubens de Figueiredo Camargo, **Ary Orozimbo Chiacchio**
IMECC, UNICAMP - Departamento de Matemática,
13081-970, Campinas, SP
E-mail: rubens@ime.unicamp.br, E-mail: ary@ime.unicamp.br,

Edmundo Capelas de Oliveira
IMECC, UNICAMP - Departamento de Matemática Aplicada,
13081-970, Campinas, SP
E-mail: capelas@ime.unicamp.br.

O cálculo fracionário é uma das ferramentas mais precisas para se refinar a descrição de fenômenos naturais. Uma maneira bastante comum de se utilizar esta ferramenta é substituir a derivada de ordem inteira de uma equação diferencial parcial, que descreve um determinado fenômeno, por uma derivada de ordem não-inteira. Vários resultados importantes e generalizações foram obtidos através desta técnica, em diversas áreas do conhecimento, tais como: mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte, redes elétricas, probabilidade, biomatemática, dentre outros [2].

Por várias razões esperadas, a solução de uma equação diferencial de ordem não-inteira costuma ser mais complexa do que a da respectiva equação de ordem inteira. Uma das dificuldades advém do fato de o conhecimento das funções inerentes ao cálculo fracionário, não ser tão desenvolvido quanto o conhecimento das funções relacionadas ao cálculo de ordem inteira. Em particular, mencionamos que uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem com coeficientes constantes apresenta, como solução, uma função exponencial o que não é o caso de uma equação diferencial fracionária, de onde emergem as funções de Mittag-Leffler [5].

No presente trabalho, utilizando o conceito de função de Green relativa à equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo [3], apresentamos e demonstramos um teorema de adição para as funções de Mittag-Leffler.

1 Preliminares

Para resolver nossa principal equação diferencial parcial fracionária[1], utilizamos a metodologia da justaposição de transformadas, ou seja, aplicamos a transformada de Fourier na parte espacial e a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal. Sendo assim, nesta seção apresentamos a derivada fracionária no sentido de Caputo [3], bem como suas transformadas de Laplace e Fourier. Além disso, recuperamos alguns resultados envolvendo as funções de Mittag-Leffler.

1.1 Derivada Fracionária

Provavelmente a existência de várias definições não equivalentes para a derivada de ordem fracionária, bem como a falta de uma interpretação geométrica evidentes fizeram com que o cálculo fracionário não fosse utilizado em larga escala [8]. Apesar disto, como foi mencionado na introdução, inúmeros resultados importantes e generalizações foram obtidos graças ao cálculo fracionário.

Há várias formas de se introduzir a derivada de ordem não-inteira como uma generalização para a derivada de ordem inteira, dentre elas podemos citar a definição de Riemann-Liouville, que é a mais conhecida e a de Caputo, que é mais restritiva, mas parece ser mais adequada para o estudo de problemas físicos [3]. Além disso, destacamos a definição de Grünwald-Letnikov que é mais apropriada para se utilizar em problemas numéricos e a

[1]Vamos utilizar a notação EDPF para designar uma equação diferencial parcial fracionária.

definição de Weyl que, dentre várias aplicações, é de fundamental importância para o cálculo da derivada fracionária, por exemplo, da função[2] $f(x) = 1/x$. Estas e outras definições podem ser encontradas em detalhes no livro de Podlubny [8].

No presente trabalho, estamos interessados na resolução de uma EDPF relacionada a um problema físico, por esta razão apresentamos apenas a derivada fracionária segundo Caputo.

A derivada de ordem $\mu \notin \mathbb{N}$ no sentido de Caputo é definida da seguinte maneira

$$\mathsf{D}_t^\mu f(t,x) \equiv \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} f(t,x) = = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau,x)}{(t-\tau)^{\mu+1-n}} \mathrm{d}\tau$$

na qual $n-1 < \mu < n$ e $f^{(n)}(t,x)$ denota a derivada usual de ordem n em relação à variável t, no caso em que $\mu \in \mathbb{N}$ temos a definição usual.

Deste ponto em diante, consideramos o limite inferior a como sendo $-\infty$ na parte espacial e zero na parte temporal. O primeiro e segundo casos estão associados, respectivamente, às transformadas de Fourier e de Laplace [6].

Sendo s, com $\mathrm{Re}(s) > 0$, o parâmetro da transformada de Laplace sabemos que [8]

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} f(t,x)\right\} = = s^\mu F(s,x) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0^+,x)$$

com $n-1 < \mu \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. Nesta equação, $F(s,x)$ denota a transformada de Laplace de $f(t,x)$. Além disso, sendo ω o parâmetro da transformada de Fourier podemos escrever para a derivada fracionária de Caputo

$$\mathcal{F}\{\mathsf{D}_x^\mu f(t,x)\} = |\omega|^{2\mu} F(t,\omega),$$

na qual $F(t,\omega)$ é a transformada de Fourier da função $f(t,x)$.

Enquanto a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo depende de condições iniciais que possuem interpretação física, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville depende de condições dadas em termos de ${}_a\mathsf{D}_t^{\mu-k-1} f(t)|_{t=0}$. Outra importante diferença entre estas duas abordagens é que a derivada fracionária de Caputo de uma constante é zero, o que não ocorre com a definição de Riemann-Liouville.[3] Isto justifica a utilização da derivada de Caputo e não a de Riemann-Liouville, quando estamos interessados em resolver uma EDPF.

1.2 Funções de Mittag-Leffler

Nesta seção introduzimos a clássica função de Mittag-Leffler, denotada por $E_\alpha(x)$, bem como a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, denotada por $E_{\alpha,\beta}(x)$, a partir da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, também conhecida como função de Mittag-Leffler generalizada, proposta por Prabhakar [9], isto é,

$$E_{\alpha,\beta}^\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \frac{z^k}{k!} \qquad (1)$$

na qual $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer,

$$(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)} \equiv \rho(\rho+1)\cdots(\rho+k-1)$$

e $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Esta função generaliza a função de Mittag-Leffler clássica e também a de dois parâmetros [7], pois $E_{\alpha,1}^1(x) = E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)}$ e $E_{\alpha,\beta}^1(x) = E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}$, conseqüentemente para $\alpha,\beta,\rho = 1$ temos $E_{1,1}^1(x) = \mathrm{e}^x$.

Nesta seção estamos interessados apenas na transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler. Diversas relações envolvendo a função de Mittag-Leffler de um parâmetro podem ser encontradas em [8].

A fim de calcular a transformada de Laplace inversa da função $(s^\alpha \pm a)^{-1}$ utilizamos uma expansão em torno de $s = \pm\infty$ e uma divisão longa, desta forma podemos escrever

$$\mathcal{L}\left[E_\alpha(\mp a\, t^\alpha)\right] = \frac{1}{s}\left[\frac{s^\alpha}{s^\alpha \pm a}\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \pm a},$$

na qual $|a/s^\alpha| < 1$. Para a respectiva transformada inversa temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \pm a}\right] = E_\alpha(\mp a\, t^\alpha)$$

[2]Tanto a definição de Caputo quanto a de Riemann-Liouville para a derivada fracionária divergem, por exemplo, para a função $f(x) = 1/x$.

[3]Note que desta forma a derivada segundo Riemann-Liouville não pode ser interpretada como a taxa de variação.

com $\alpha > 0$. Hartley-Lorenzo [4] discutem a solução geral de uma EDPF linear e obtêm diversas relações envolvendo a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Para a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, temos que a transformada de Laplace é dada por [8]

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\mp a t^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \pm a} \qquad (2)$$

e a correspondente transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \pm a}\right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\mp a t^{\alpha}), \qquad (3)$$

a qual é válida para $|a/s^{\alpha}| < 1$.

Enfim, podemos escrever a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler generalizada [5], ou seja,

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\rho}}$$

cuja transformada inversa pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\rho}}\right] = t^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\pm\lambda\, t^{\alpha}), \qquad (4)$$

com $\mathrm{Re}(s) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Note que para $\rho = 1$, isto é, $E^{1}_{\alpha,\beta}(x) = E_{\alpha,\beta}(x)$ recuperamos o resultado da equação (2). Destacamos por fim que recentemente Chamati-Tonchev [1] introduziram a função de Mittag-Leffler generalizada na teoria de "finite-size scaling".

2 A Equação do Telégrafo Fracionária

A assim chamada equação diferencial do telégrafo fracionária é dada por

$$(\mathsf{D}^{2\alpha}_{t} + 2\lambda\,\mathsf{D}^{\alpha}_{t} - \mathsf{D}^{2\gamma}_{x})G^{\gamma}_{\alpha}(x,t) = \lambda_1\delta(t)\delta(x) \qquad (5)$$

na qual $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $\mathsf{D}_{\xi} = \partial/\partial\xi$, λ e λ_1 são constantes positivas. Esta equação generaliza a clássica equação do telégrafo e também, para valores específicos dos parâmetros, a equação de difusão. A função de Green associada à equação (5) foi recentemente discutida [3].

Em [3] discute-se a solução para a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo através de dois métodos diferentes. Comparando os resultados obtidos podemos escrever novas relações matemáticas e um teorema de adição envolvendo as funções de Mittag-Leffler. Apresentamos os principais passos que levaram ao nosso resultado principal e posteriormente propomos uma demonstração formal para um novo teorema de adição associado à função de Mittag-Leffler generalizada.

Consideramos condições iniciais homogêneas e convenientes condições de contorno, de tal forma que a transformada de Fourier possa ser calculada. Utilizando a justaposição de transformadas, Fourier na parte espacial e Laplace na parte temporal, obtemos a partir da equação (5), a seguinte expressão

$$\mathcal{G}^{\gamma}_{\alpha}(\omega,s) = \frac{\lambda_1}{s^{2\alpha} + 2\lambda\, s^{\alpha} + \Lambda} \qquad (6)$$

na qual $\Lambda = -|\omega|^{2\gamma}$, ω e s são, respectivamente, os parâmetros da transformada de Fourier e de Laplace. Podemos reescrevê-la na forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{\gamma}_{\alpha}(\omega,s) &= \frac{\lambda_1}{\Lambda}\frac{\Lambda\, s^{-\alpha}}{s^{\alpha}+2\lambda}\frac{1}{1+\dfrac{\Lambda\, s^{-\alpha}}{s^{\alpha}+2\lambda}} \\ &= \lambda_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Lambda^k\frac{s^{-\alpha k-\alpha}}{(s^{\alpha}+2\lambda)^{k+1}}.\end{aligned}$$

com $|\Lambda\, s^{-\alpha}/(s^{\alpha}+2\lambda)| < 1$. Calculando a transformada de Laplace inversa podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbb{G}^{\gamma}_{\alpha}(\omega,t) = \lambda_1\sum_{k=0}^{\infty}(-\Lambda)^k &\qquad \times \\ \times \qquad t^{2\alpha k+2\alpha-1}E^{k+1}_{\alpha,2\alpha k+2\alpha}&(-2\lambda\, t^{\alpha})\end{aligned} \qquad (7)$$

onde $E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x)$ é dada pela equação (1).
Por outro lado, considerando o denominador da equação (6) escrito da seguinte forma

$$s^{2\alpha} + 2\lambda s^{\alpha} + \Lambda = (s^{\alpha}-\mu_1)(s^{\alpha}-\mu_2)$$

onde $\mu_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2-\Lambda}$ e $\mu_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2-\Lambda}$, podemos calcular a transformada de Laplace inversa de uma maneira distinta, de modo a obter

$$\begin{aligned}\mathbb{G}^{\gamma}_{\alpha}(\omega,t) = &= \lambda_1\frac{t^{2\alpha-1}}{\mu_1-\mu_2}\{\mu_1E_{\alpha,2\alpha}(\mu_1t^{\alpha}) - \\ &- \mu_2E_{\alpha,2\alpha}(\mu_2t^{\alpha})\}\end{aligned}$$

3 Teorema de Adição

Comparando as duas expressões para $\mathbb{G}_\alpha^\gamma(\omega, t)$, obtidas anteriormente, podemos escrever um novo teorema de adição para as funções de Mittag-Leffler. Note que a demonstração para o teorema que se segue é uma conseqüência natural das duas formas de se calcular a função de Green, contudo aqui apresentamos uma demonstração formal.

Teorema. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$ e $|y| < 1$. Se $x \neq y$ então

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha,2k\alpha+2\alpha}^{k+1}(x+y) = \frac{x\, E_{\alpha,2\alpha}(x) - y\, E_{\alpha,2\alpha}(y)}{x-y} \tag{8}$$

onde $E_{\alpha,2k\alpha+2\alpha}^{k+1}(x+y)$ é dado pela equação (1) e $E_{\alpha,\beta}^1(\xi) = E_{\alpha,\beta}(\xi)$ é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

Demonstração. Sejam $|x| < 1$ e $|y| < 1$. A partir da equação (1) podemos escrever para o primeiro membro da equação (8)

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha,2k\alpha+2\alpha}^{k+1}(x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(k+1)_\rho}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha k + 2\alpha)} \times \\ &\times \frac{(x+y)^\ell}{\ell!}\end{aligned}$$

Utilizando a expressão do binomial e rearranjando os somatórios podemos escrever

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{k!} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\ell+1)}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha k + 2\alpha)} \frac{x^{\ell-n} y^n}{n!(\ell-n)!}.\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável $\ell \to \ell + n$ na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \times \\ &\times \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\ell+n+1)}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha k + 2\alpha)} \frac{x^\ell}{\ell!}.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índices, $n \to n - k$ e $\ell \to \ell - k$ temos

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{y^n}{(n-k)!} \times \\ &\times \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell+n-k+1)}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha)} \frac{x^\ell}{(\ell-k)!},\end{aligned}$$

que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha)} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(\ell+n-k)!}{(n-k)!(\ell-k)!}.\end{aligned}$$

A fim de efetuar a soma em k, utilizamos a seguinte relação para os coeficientes binomiais:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-n \\ m-n \end{pmatrix}.$$

Desta forma concluímos, para o primeiro membro da equação (8), que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha,2k\alpha+2\alpha}^{k+1}(x+y) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha)}.\end{aligned}$$

Por outro lado, o segundo membro da equação anterior pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha)} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha)} \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{y}{x}\right)^n.\end{aligned}$$

Utilizando a sequinte expressão

$$\frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{x-y} = x^\ell \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

válida para $x \neq y$, podemos escrever

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha)} = \\ &= \frac{1}{x-y} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha)} = \\ &= \frac{1}{x-y} \left\{ x \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha)} - \right. \\ &\left. - \; y \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha)} \right\}.\end{aligned}$$

Utilizando a equação (1) com $\rho = 1$ temos

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha)} = \\ &= \frac{x\, E_{\alpha,2\alpha}(x) - y\, E_{\alpha,2\alpha}(y)}{x-y}\end{aligned}$$

onde $E_{\alpha,\beta}^1(z) \equiv E_{\alpha,\beta}(z)$ é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. O teorema está provado ∎

4 Aplicações

Utilizando a regra de l'Hôpital e a equação (8), obtemos, como corolário, o importante resultado que se segue, isto é, uma regra de soma envolvendo uma função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

Corolário. Para $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k E_{\alpha,2\alpha k+2\alpha}(2x) &= \\ = \quad & \left(1 + x\frac{d}{dx}\right) E_{\alpha,2\alpha}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Demonstração. Utilizando a regra de l'Hôpital e tomando o limite $y \to x$ na equação (8) segue-se o resultado ■

Como um particular caso desta relação, tomamos $\alpha = 1$ na equação (9) de modo a obter uma nova regra de soma para a função hipergeométrica confluente, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!} \, {}_1F_1(k+1; 2k+2; 2x) = \mathrm{e}^x. \tag{10}$$

Além disso, no caso em que $y = -x$ temos, a partir da equação (8),

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \, E_{\alpha,2\alpha k+2\alpha}^{k+1}(0) = E_{2\alpha,2\alpha}(x^2). \tag{11}$$

Enfim, substituindo $\alpha = 1$ na equação anterior, recuperamos a clássica expansão de MacLaurin para a função co-seno hiperbólico.

5 Conclusões

Neste trabalho, utilizando o conceito de função de Green fracionária associada à equação do telégrafo fracionária, escrita em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, estabelecemos novas relações envolvendo as funções de Mittag-Leffler.

Uma continuação natural deste trabalho é generalizar os resultados advindos do cálculo das funções de Green e propagadores para a equação geral de difusão (de onda) com derivada temporal fracionária, em uma, duas e três dimensões, isto é, substituindo o operador diferencial de Laplace por sua generalização fracionária.

Agradecimentos

RFC agradece ao CNPq pelo suporte financeiro e ECO agradece à Fapesp (06/52475-8) pelo auxílio à pesquisa.

Referências

[1] H. Chamati and N. S. Tonchev, *Generalized Mittag-Leffler Functions in the Theory of Finite-Size Scaling for Systems With Strong Anisotropy and/or Long-Range Interaction*, J. Phys. A: Math. Gen., **39**, 469-478, (2006).

[2] Debnath, *Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering*, Int. J. Math. **2003**, 3413-3442 (2003).

[3] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation*, J. Math. Phys., **49**, 033505, (2008) [DOI 10.1063/1.2890375].

[4] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo, *A Solution to the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation*, NASA/TP-1998-208693 (1998).

[5] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Mathematics Studies, Vol. 204, Edited by Jan van Mill, Elsevier, Amsterdam, (2006).

[6] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, *Initialized Fractional Calculus*, NASA/TP-2000-209943.

[7] F. Mainardi and R. Gorenflo, *On Mittag-Leffler-Type Functions in Fractional Evolution Process*, J. Comput. Appl. Math., **118**, 283-299, (2000).

[8] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.198, Academic Press, San Diego, (1999).

[9] T. R. Prabhakar, *A Singular Integral Equation With Generalized Mittag-Leffler Function in the Kernel*, Yokohama Math. J., **19**, 7-15, (1971).