Sistemas Fuzzy Intervalares

Anderson P. Cruz, **Benjamín C. Bedregal**,
Depto de Informática e Matemática Aplicada, UFRN,
59072-970, Natal, RN
E-mail: andersonpc@ppgsc.ufrn.br, bedregal@dimap.ufrn.br

Resumo: *A necessidade crescente de desenvolver sistemas aliada à carência de tecnologias mais avançadas refletem a relevância de se construir novas ferramentas (teóricas ou aplicativas). Pensando nisso, propõe-se uma nova ferramenta teórica, a Teoria da Representação Fuzzy Intervalar, que viabiliza a implementação de novos sistemas capazes de tratar problemas complexos e ambíguos (pois se fundamenta na teoria fuzzy), de forma segura (já que usa a aritmética intervalar assegurando a corretude dos valores) e ótima (porque aplica a teoria de representação intervalar). Além da apresentação da teoria demonstrar-se-á ainda a aplicação da mesma em uma simulação de um sistema de controle fuzzy intervalar.*

1 Introdução

A lógica Fuzzy, foi desenvolvida por Lofti A. Zadeh, a partir do artigo "*Fuzzy Sets*" ([6]). Neste é apresentado a teoria dos conjuntos Fuzzy, a qual se fundamenta em determinar um grau de pertinência que indicará quanto um determinado elemento pertence a um determinado conjunto. Esse grau é definido para valores reais do intervalo [0,1], ao invés da usual bivaloração: verdadeiro (1) e falso (0).

Por se basear em tal forma de valoração, a lógica fuzzy se torna uma ferramenta útil para representar o conhecimento incerto (o raciocínio aproximado) e conseqüentemente é perfeitamente cabível na representação de situações cotidianas. Além de quando há conceitos os quais são melhores definidos por palavras do que pela matemática, visto que ela usa variáveis lingüísticas.

Por outro lado alguns problemas têm de ser enfrentados ao se implementar um sistema computacional que necessite de resultados numéricos bastante precisos; são problemas causados pelo uso de ponto flutuante (representação digital aproximada), também conhecidos pela computação numérica como os erros de arredondamento e de truncamento. Trabalhar com pontos flutuantes traz uma incerteza que o raciocínio fuzzy não é capaz de resolver, e pode até mesmo ser perigoso, dependendo da finalidade à que o sistema é implementado (veja por exemplo os desastres descritos em [9]).

Para lidar com problemas comuns em computação numérica, Moore, em [11] e [12], elaborou uma análise intervalar em que cada valor real é tratado como um intervalo real fechado (equação 1), obtendo a partir daí, topologias, uma aritmética (chamada aritmética intervalar), relações entre seus elementos, etc..

$$[a,b] = \{x \in \Re \,|\, a \leq x \leq b\} \tag{1}$$

A utilização de intervalos também pode ser requerida quando não há, ou não se quer ter, certeza dos valores exatos com que as variáveis irão trabalhar. Os intervalos então irão propiciar uma faixa de valores para cada variável. A exemplo de uso disto tem-se a regulagem da temperatura da água de chuveiros (onde não é desejável que um pequeno aumento na vazão da água fria ou quente faça-a esfriar ou esquentar demais), sistemas que determinam características de agentes (não devem ser determinísticos já que não é possível medir quanto um agente é egoísta ou autruísta...), entre outros.

Para construir uma Teoria de **Representação** Fuzzy Intervalar, é também necessário um mecanismo de transformação, ou melhor, uma forma de representar entidades Reais (cujos elementos pertencem aos $\Re$) em entidades intervalares. Por isso falar-se-á sobre o conceito de Representação Intervalar Canônica.

A classe de representações intervalares canônicas está associada aos algoritmos intervalares que satisfazem a propriedade de optmalidade ([10]), ou seja, que retornam intervalos corretos e de menor abrangência possível. Então seja $f\colon \Re \rightarrow \Re$, se f é uma função real total não-assintótica (não assintótica no sentido de que, se para algum intervalo [a,b], o conjunto $\{f(x')|a \leq x' \leq b\}$ não tem um supremo nem um ínfimo), logo a função que a define melhor é:

$$RIC(f)([a,b]) = [min\ f([a,b]), max\ f([a,b])]; \tag{2}$$

e é chamada de **representação intervalar canônica** de *f*.

Portanto, *RIC(f)* é uma função que mapeia cada intervalo [a,b] no menor intervalo contendo f([a,b]) ([7]). Essa definição captura e formaliza a idéia de optimalidade proposta em [10].

Ao longo deste artigo serão mostrados alguns dos resultados de [4] e [3] acerca desta teoria para entendê-la e conseqüentemente demonstrar a viabilidade de sua aplicação através de um estudo de caso.

2 Teoria da Representação Fuzzy Intervalar

A Teoria da Representação Fuzzy Intervalar assim como a teoria fuzzy, terá seu estudo subdivido em teoria dos conjuntos (fuzzy intervalar) e lógica (fuzzy intervalar).

O conjunto fuzzy intervalar será definido a partir de: um grau de pertinência, que será um sub-intervalo do intervalo [0,1]; e de uma entrada, que é um elemento de um conjunto cujos elementos são intervalos de um universo de intervalos. Esta definição estende toda a teoria de Conjuntos Fuzzy para uma teoria de Conjuntos Fuzzy Intervalar suficientemente capaz de expressar qualquer conjunto Fuzzy (seja este intervalar ou não) em que os valores inteiros dos conjuntos fuzzy não intervalares são representados por intervalos degenerados. Tal generalização pode ser ainda estendida para qualquer entidade fuzzy, pois todas elas são definidas a partir de uma entrada e um grau de pertinência.

Portanto, seja U_{IA} um conjunto de intervalos, um conjunto fuzzy intervalar IA é definido segundo a equação 3. E como se trata de uma teoria de representação, caso haja um dado conjunto fuzzy A sobre um universo U_A e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A. Então é possível definir um conjunto fuzzy A intervalizado ($I(A)$) cuja definição é dada pela equação 4. Observando que $I(A)$ é a melhor representação intervalar de A pois se trata da representação intervalar canônica de A já que $\varphi_{I(A)}(X) = RIC(\mu_A)(X)$.

$$IA = \{(X, \varphi_{IA}(X))|X \in U_{IA}\} \tag{3}$$

onde $X = [\underline{x}, \overline{x}]$.

$$I(A) = \{(X, \varphi_{I(A)}(X))|X \in I[U_A]\} \tag{4}$$

onde $\varphi_{I(A)}(X)$ =[inf$\{\mu_A(x)|x \in X\}$, sup$\{\mu_A(x)|x \in X\}$] e $I[U_A] = \{[a,b]\,|\,a,b \in U_A\, e\, a \leq_A b\}$ é o universo U_A composto por intervalos (intervalizado).

Observação 2.1 *Note que $I(A)$ representa intervalarmente A se, e somente se $\forall \underline{x}, \overline{x}.(X \in I[U_A])$ e $\forall x \in X.(\mu_A(x) \in \varphi_{IA}(X))$.*

Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos fuzzy intervalares sobre $I[U_A]$ tais que ambos representam intervalarmente A. Diz-se que A_2 é uma representação intervalar de A melhor que A_1, denotado por $A_1 \preceq A_2$, se e somente se, $\forall X \in I[U_A].(A_1(X) \supseteq A_2(X))$.

As funções de pertinência na teoria dos conjuntos fuzzy intervalares são estabelecidas a partir dos valores retornados por uma **função de limite inferior** denotada por $\varphi_{IAi}(X)$, e uma **função de limite superior**, denotada por $\varphi_{IAs}(X)$, (figura 1). Na qual $\varphi_{IAi} : U_{IA} \rightarrow [0,1]$ e $\varphi_{IAs} : U_{IA} \rightarrow [0,1]$ (sendo U_{IA} um universo intervalar). Tais funções são definidas através das projeções π_1 e π_2 em que $\pi_1([a,b]) = a$ e $\pi_2([a,b]) = b$ (equações 5 e 6).

$$\varphi_{IAi}(X) = \pi_1 \varphi_{IA}(X) \tag{5}$$

$$\varphi_{IAs}(X) = \pi_2 \varphi_{IA}(X) \tag{6}$$

Tais funções de pertinência são geradas através da adição de uma margem de erro proporcional às regiões de maior indefinibilidade (regiões mais distantes do extremo) ao conjunto fuzzy. Pois quanto mais próximo dos graus 0 e 1 maior a certeza de que o valor do domínio pertence ou não ao conjunto, ou seja, quanto mais próximo dos extremos menos ambígüa é a função.

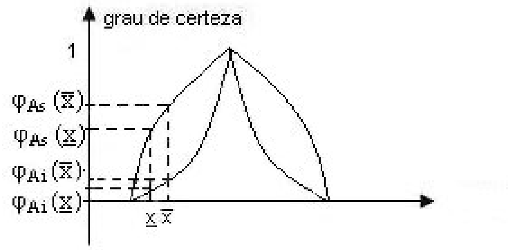


Figura 1: Gráfico de uma Função de Pertinência Fuzzy Intervalar.

2.1 Lógica Fuzzy Intervalar

A lógica fuzzy (intervalar) é baseada na teoria dos conjuntos fuzzy intervalares exposta anteriormente. Ela é composta por variáveis e modificadores lingüísticos, proposições envolvendo tais variáveis e conectivos.

As variáveis lingüísticas são variáveis cujos valores são nomes de conjuntos fuzzy intervalares. E os modificadores lingüísticos fuzzy intervalares proporcionam uma mudança na função de pertinência de forma que ela relacione o valor semântico do modificador à uma equação matemática, fazendo com que o valor original da função de pertinência seja alterado. Portanto seja A um conjunto fuzzy intervalar com a função de pertinência $\varphi_A(X)$. Então, o modificador lingüístico intervalar de A é uma função intervalar $M : I[0,1] \rightarrow I[0,1]$ que age na função de pertinência $\varphi_{IA}(X)$ transformando-a em $\varphi_{mIA}(X)$. Onde $\varphi_{mIA}(X) = M(\varphi_{IA}(X))$.

Os conectivos lógicos fuzzy são os mesmos da lógica clássica ([2]). Entretanto, para um sistema de inferência fuzzy há a necessidade de aplicar AND, OR e NOT. O AND e o OR podem ser construídos a partir de qualquer t-norma e sua t-conorma (respectivamente) [7, 8], já que as t-normas podem ser usadas como operadores fuzzy ([1]). Todavia, neste trabalho, utilizar-se-á os operadores INF e SUP (para definir o AND e OR respectivamente).

$$INF\{[a,b],[c,d]\} = [min(a,c),\, min(b,d)]$$
$$SUP\{[a,b],[c,d]\} = [max(a,c),\, max(b,d)]$$
$$NOT = 1 - [a,b] = [1-b, 1-a]$$

Relações Fuzzy Intervalar Analogo ao que é definido e provado para os conjuntos fuzzy intervalares, é definido e provado para as relações e composições fuzzy intervalares. Assim, uma relação fuzzy intervalar binária IR entre os conjuntos fuzzy intervalares IA e IB é definida sobre os universos U_{IA} e U_{IB} segundo a equação 7. E seja R uma relação fuzzy sobre os universos U_A e U_B e seja $\leq_A$ uma ordem parcial sobre U_A e $\leq_B$ uma ordem parcial sobre U_B então $I(R)$ é a melhor representação intervalar de R se, e somente se definido como na equação 8.

$$IR = \{((X,Y), \varphi_{IR}(X,Y)) | X \in U_{IA}\, e Y \in U_{IB}\} \quad (7)$$

$$I(R) = \{((X,Y),\, \varphi_{I(R)}(X,Y)) \,|\, X \in I[U_A] \; e\, Y \in I[U_B]\} \quad (8)$$

onde $\varphi_{I(R)}(X,Y) = [\inf\{\mu_R(x,y) \,|\, x \in X\, e\, y \in Y\},\, \sup\{\mu_R(x,y) \,|\, x \in X\, e\, y \in Y\}]$

Diz-se que uma relação fuzzy intervalar $I(R_2)$ é uma representação intervalar de R melhor que $I(R_1)$, denotado por $I(R_1) \preceq I(R_2)$, se e somente se, para todo $X \in I[U_A]$ e $Y \in I[U_B]$, $I(R_1)(X,Y) \supseteq I(R_2)(X,Y)$.

Outro tipo de relação existente são as relações de implicação (extremamente necessárias para implementação de um sistema de inferência fuzzy). As implicações são utilizadas entre as proposições como regras fuzzy em sistemas fuzzy intervalares. Ela é especificada a partir da regra genérica "**Se** x está em A **então** y está em B" ($x \in A \rightarrow y \in B$). A função de pertinêcia de uma relação de implicação na lógica fuzzy intervalar ($\varphi(X,Y)$) será dada por $\varphi(X,Y) = \varsigma(\varphi_A(X),\, \varphi_B(Y))$ onde ς é um dado operador de implicação; portanto:

$$\varphi(X,Y) = \varsigma([\inf\{\mu_A(x) \,|\, x \in X\}, \sup\{\mu_A(x) | x \in X\}], [\inf\{\mu_B(y) \,|\, y \in Y\}, \sup\{\mu_B(y) \,|\, y \in Y\}]). \quad (9)$$

Há diversos tipos de relações de implicação devido à existência de inúmeros operadores de implicação. Para exemplificar, vide a seguir a definição do operador Zadeh Max-Min (ς_m):

$$\varsigma_m = MAX\{MIN\{\varphi_A(X),\, \varphi_B(Y)\},\; 1 - \varphi_A(X)\}$$

Note que também é possível transformar uma relação de implicação fuzzy R em uma relação fuzzy intervalar $I(R)$ cuja definição á similar à equação 8 com distinção da função de pertinência que é idêntica a definida pela equação 9.

As composições fuzzy intervalares são usadas para compor duas relações fuzzy intervalares ($IR_1 \diamond IR_2$). Podendo ainda ser feita a intervalização da composição de relações fuzzy ($R_1 * R_2$) transformando-a de forma correta e ótima em uma composição de relações fuzzy intervalizada ($I(R_1 * R_2)$). Na literatura são definidas diversas composição de relações fuzzy intervalares tais como Max-Min, Max-Produto e Max-Average. Em [4] é definido tais composições fuzzy intervalares. Aqui, apenas para exemplificar, mostrar-se-á a definição da função de pertinência da composição Max-Min: $\varphi_{IR_1 \circ IR_2}(X, Z) = MAX\{MIN\{\varphi_{IR1}(X, Y), \varphi_{IR2}(Y, Z)\} \mid Y \in U_{IB}\}$

2.2 Sistema de Inferência Fuzzy Intervalar

No sistema de inferência fuzzy intervalar os conjuntos de entrada e de saída são fuzzy intervalares, bem como o fuzzyficador e o defuzzyficador. Em função disso, a obtenção do número crisp e a modelagem dos conjuntos de entrada e de saída não são idênticas às definidas em [6] ou em [13].

Fuzzyficação Intervalar No estágio da fuzzyficação intervalar serão mapeados os valores de entrada em conjuntos fuzzy intervalares relevantes ao problema, criando então uma função de pertinência $\varphi_{IA}(X)$ formada pelas funções de $\varphi_{IAi}(X)$ e $\varphi_{IAs}(X)$). Tais conjuntos devem ser sub-dividos em conjuntos de entrada superior (IA_s) e inferior (IA_i) para a aplicação das regras de inferência.

Inferência Fuzzy Intervalar Nesta fase pode ser usada a inferência modus ponens generalizada (com o uso de uma composição intervalar) e uma regra de inferência composicional fuzzy. Assim, a inferência fuzzy intervalar será definida da seguinte forma: $B' = A' \diamond (A \to B) = A' \diamond IR(X, Y)$. Sendo A, B, B' e A' conjuntos fuzzy intervalares e B' o conjunto solução obtido da mesma forma como é obtido nos sistemas fuzzy. Havendo várias conclusões $B_i's$, então estas devem ser ligadas por operadores de ligação que será ou AND ou OR dependendo do operador de implicação utilizado.

Defuzzyficação Intervalar Este processo é semelhante ao descrito em [13]. Após a execução das regras de inferência são gerados os conjuntos fuzzy intervalares solução inferior e superior. Como haverá duas funções, então dois valores crisp x' serão calculados, através da aplicação de algum método de defuzzificação fuzzy. Um x' para $\varphi_{IAi}(X)$ (representado por d_i) e outro para $\varphi_{IAs}(X)$ (representado por d_s). Esses então compõem o intervalo DI (resultado da defuzzyficação intervalar e defininido pela equação 10 – [13]). Podendo ainda ser convertido num único valor, através da média aritmética entre d_i e d_s.

$$DI = [min(d_i, d_s), max(d_i, d_s)] \tag{10}$$

3 Estudo de Caso

Um sistema de inferência fuzzy tem seu reconhecido e amplo uso em engenharia de controle qualquer que seja o tipo de controlador.

Sistema de Controle de Temperatura e Vazão Trata-se aqui uma adaptação de um problema proposto em [15] onde tem-se um líqüido proveniente de uma mistura em um tanque onde ocorre uma reação exotérmica e por isso tal líqüido é muito quente. Este fluido é condicionado por água a 85ºF que flui contra corrente do tal líqüido. O líquido deve se manter idealmente a 110ºF com ponto de flutuação de $\pm 5^o F$ pois é usado em outro processo. O sistema fuzzy irá controlar a válvula controladora de vazão d'água baseada na variação de temperatura $\Delta T = T - 110$. O quão se deve abrir ou fechar a válvula é determinado pela mudança fracional da válvula de modo que $Nova\_pos.\_da\_valv = ultima\_pos + f \cdot R$, onde $R = 1 - ultima\_pos$ se $f > 0$ e $R = ultima\_pos$ caso contrário. Portanto qual seria a nova posição da válvula supondo que a posição antiga da válvula é 0.6, a temperatura do fluido é 122ºF e há uma razoável taxa de ruído na fábrica de modo que os valores de temperatura e força coletados pelo sensor não sejam confiáveis (o domínio da função deve ser intervalar)? Suponha também que os especialistas não têm certeza da descrição das funções ΔT e f e há necessidade de uma maior precisão dos dados fornecidos pelos mesmos pois o fuido ainda será usado em outro processo.

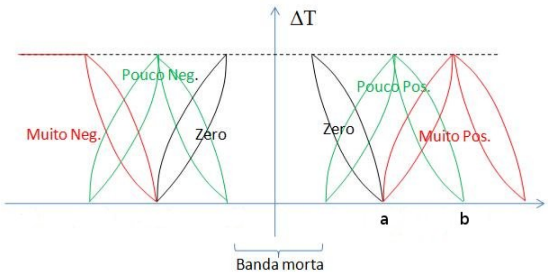


Figura 2: Variável Lingüística ΔT.

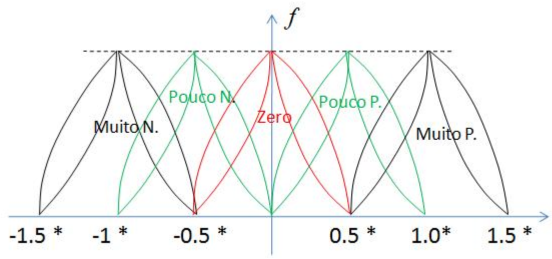


Figura 3: Variável lingüística f.

Este é um problema simples de entrada (variação de temperatura ΔT) e saída (fração de mudança da válvula f) simples (SISO). Para tais variáveis determina-se as variáveis lingüísticas: Muito Negativo (MN), Pouco Negativo (PN), Zero, Muito Positivo (MP) e Pouco Positivo (PP). Segundo as especificações dadas em [15] e devido a maior necessidade de precisão dos dados, os conjuntos fuzzy são definidos conforme apresentado nas figuras 2 e 3. Onde as funções de pertinência inferior e superior são definidas respectivimante como $(\frac{b-x}{b-a})^{1,2}$ e $\sqrt[1,2]{\frac{b-x}{b-a}}$); e ambas sofrem arredondamento direcional (para baixo caso seja a função inferior e para cima caso seja a superior) – sejam b e a os menores intervalos tais que $\varphi_{\Delta T}(b) = RIC(\Delta T(b))$ e $\varphi_{\Delta T}(a) = RIC(\Delta T(a))$ representados na figura 2 onde a=10* e b=15* e '*' indica que são as melhores representações intervalares dos elementos do domínio (os quais neste caso são 10 e 15).

As regras de inferência são do tipo SE ΔT é ...ENTÃO f é.... Elas são definidas segundo a tabela 1.

A partir dos dados do problema tem-se que $\Delta T = 12^{o}F$. Com isso temos que ΔT pode ser PP ou MP com seus respectivos graus de pertinência ($\varphi(\Delta T)_{PP}$ e $\varphi(\Delta T)_{MP}$) como é visto nas figuras 4 e 6. Aplicando a inferência fuzzy intervalar Min-Max obtém-se que o grau de pertinência de f o qual será o mesmo de ΔT nos conjuntos fuzzy intervalares MP e PP.

Regra	ΔT	f
1	MP	MP
2	PP	PP
3	Zero	Zero
4	PN	PN
5	MN	MN

Tabela 1: Regras de Inferência.

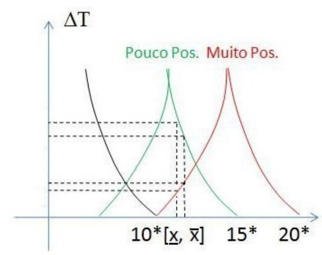
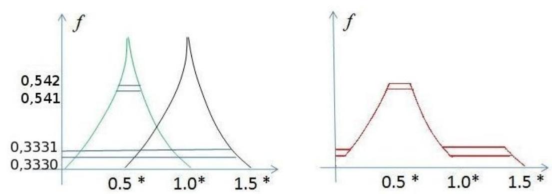


Figura 4: Aplicação das regras de inferência no conjunto de entrada inferior.



(a) (b)

Figura 5: Aplicação da inferência fuzzy no conjunto de saída inferior.

No entanto perceba que isso deverá ser feito para a função de pertinência inferior ($\varphi(\Delta T)_i$) e superior ($\varphi(\Delta T)_s$). As quais são obtidas a partir da aplicação de π_1 e π_2. Nas figuras 5(a) e 7(a) vê-se a aplicação das regras de inferências nos conjuntos fuzzy inferior e superior f respectivamente. E nas figuras 5(b) e 7(b) vê-se o resultado da inferência fuzzy intervalar inferior e superior respectivamente (na figura 8 vê-se o conjunto solução do problema). A melhor escolha entre os métodos de inferência e de defuzzificação ainda é um problema em aberto em sistemas de controle fuzzy (segundo [15]). Por isso o engenheiro de controle responsável por solucionar o problema tem obrigação apenas de que seu seu sistema responda satisfatoriamente o que não necessariamente é a melhor resposta (esta por sua vez pode ser conquistada

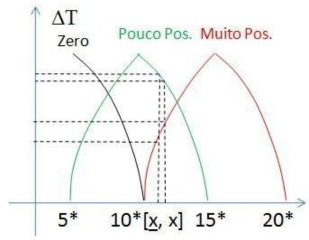
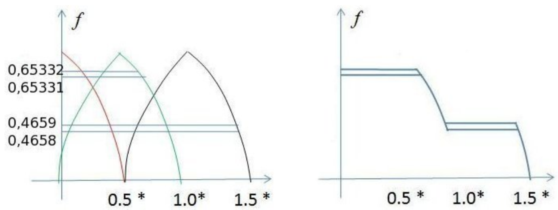


Figura 6: Aplicação das regras de inferência no conjunto de entrada superior.



(a) (b)

Figura 7: Aplicação da inferênicia fuzzy no conjunto de saída superior.

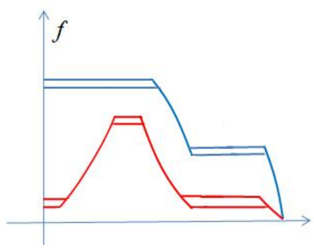


Figura 8: Região fuzzy intervalar de solução.

através da aplicação de testes com os diferentes métodos).

Os valores apresentados neste artigo foram arrendondados direcionalmente visto que o computador não tem capacidade de computar os valores exatos nem de calcular o RIC de uma função. A conseqüência disto é a geração de valores intervalares do domínio que talvez não sejam suficientemente pequenos para se dizerem ótimos tal como definido na teoria de representação fuzzy intervalar. Assim, conclui-se deste estudo de caso que o sistema de controle fuzzy intervalar é correto, entretanto sua optimalidade ainda não é garantida apenas na prática.

4 Conclusão

Apresenta-se aqui uma extensão da teoria fuzzy generalizando-a à uma teoria intervalar capaz de representar sistemas (com base de dados esaídas intervalares ou não) fuzzy e capaz de transformar sistemas fuzzy em fuzzy intervalares de maneira ótima e correta. Ampliando ainda mais a importância deste artigo demonstra-se a solução de dois problemas da engenharia de controlemostrando assim a eficiência e garantia de funcionamento e aplicação dessa teoria. Em se tratando de possíveis aplicações, como exemplo pode-se citar uma rede neural fuzzy que poderia ser capaz de trabalhar com um conjunto de entrada intervalar ou não. Além da conhecida importância da aplicação de sistemas fuzzy em áreas como Engenharia de Controle e Inteligência Artificial; nota-se também que há uma grande quantidade de sistemas que necessitam do uso da matemática intervalar seja pelo fato de que as variáveis possuem valores muito precisos e os computadores não conseguem representá-los corretamente, ou porque os especialistas não desejam trabalhar com variáveis inteiras e optam por definir faixas para as mesmas. Tornado assim a possibilidade de se fazer uma intervalização, um fato vantajoso.

Como [14] também propõe uma ferramenta teórica fuzzy intervalar, é importante diferenciar esta, da teoria fuzzy intervalar, proposta neste artigo. Enquanto [14] apenas intervaliza a função de pertinência, aqui é feita a intervalização tanto das entradas quanto da função de pertinência. Outra diferença é que este artigo visou e obteve como resultado final a modelagem de uma teoria baseada na construção de RIC, capaz então de transformar um sistema fuzzy em um fuzzy intervalar, enquanto a proposta de [14] não tinha tal intenção. Finalmente, a principal diferença de nossa abordagem à outras que ligam lógica fuzzy com matemática intervalar é a extensão de toda a teoria fuzzy para uma teoria fuzzy intervalar que leva em consideração aspectos como corretude e optimalidade.

Referências

[1] C. Alsina, E. Trillas, L. Valverde, On non-distributive logical connectives for fuzzy set theory, *Busefal*, 3 (1980) 18-29.

[2] B.C.Bedregal, A.P. Cruz, Propositional Logical as a Propositional Fuzzy Logic,

Eletronic Notes in Theorical Computer Science, 143 (2006) 5-12.

[3] , A.P. Cruz, Fundamentos de Sistemas Fuzzy Baseados em Dados Intervalares à Luz de uma Teoria de Representação Fuzzy Intervalar, Undergraduate Thesis published in www.dimap.ufrn.br/∼bedregal /students.html, DIMAp/UFRN, Natal-RN (2006)

[4] A.P. Cruz, B.C.Bedregal, Fundamentos de Sistemas Fuzzy Baseados em Dados Intervalares à Luz de uma Teoria de Representação Fuzzy Intervalar, *Logic Applied to Technology - LAPTEC* (2007)

[5] M.M.C. Cruz, Equivalência e Consistência entre Funções Intervalares, Tese de Mestrado, DIMAp/UFRN (2000).

[6] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8 (1965) 338-353.

[7] B.C. Bedregal, A. Takahashi, The best interval representation of t-norms and automorphisms, *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (2006) 3220-3230.

[8] B. R. C. Bedregal, A. Takahashi", Interval valued versions of t-conorms, fuzzy negations and fuzzy implications, *Fuzzy-IEEE 2006 international conference* (2006).

[9] C. Vuik, Disasters Caused by Numerical Errors, Available in: http://ta.twi.tudelft.nl/users/vuik /wi211/disasters.html", Access in February 2007"(2001).

[10] T. Hickey, Q. Ju, M.H. Van Emdem, Interval arithmetic: From principles to implementation, *Journal of the ACM*, 48 (2001) 1038-1068.

[11] R.E. Moore, Automatic error analysis in digital computation, Lockheed Missiles and Space Co. (1959).

[12] , R.E. Moore, Methods and Applications of Interval Arithmetic, Studies in Applied Mathematics - SIAM (1979).

[13] M.M.T. Silveira, B.C. Bedregal, A method of Inference and Defuzzyfication Fuzzy Interval, *The 2001 Artificial Inteligence and Application* (2001).

[14] M.M.T. Silveira, Teoria Fuzzy Intervalar: Uma proposta de Integração da Matemática Intervalar à Teoria Fuzzy, Tese de Mestrado, DIMAp/UFRN (2002).

[15] T.J. Ross, "Fuzzy Logic with Engeneering Aplications", WILEY, England (2004).

[16] W. Gautschi, A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae, em "E.B. Christoffel - The influence of his work in mathematics and physical sciences" (P.L. Butzer e F. Fehér, eds.) pp. 72-147, Birkhäuser Verlag, Basel, 1981.

[17] N.J. Higham, "Handbook of Writing for the Mathematical Sciences", SIAM, Philadelphia, 1993.

[18] L.J. Leonard, "Métodos Numéricos para Equções Parabólicas", Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, 2006.