

Simulação Numérica de radiação sonora através do Método de Elementos de Contorno

Emerson S. Costa

Mestrando em Modelagem Matemática e Computacional, CEFET-MG
30.510-000, Belo Horizonte, MG
E-mail: emersondesousa@yahoo.com.br

Ester N. M. Borges

CEFET-MG– Departamento Acadêmico de Disciplinas Básicas
30.510-000, Belo Horizonte, MG
E-mail: ester@des.cefetmg.br

Márcio M. Afonso

CEFET-MG – Departamento Acadêmico de Engenharia Elétrica
30.510-000, Belo Horizonte, MG
E-mail: marciomatias@des.cefetmg.br

Resumo: *Com o advento dos computadores e o desenvolvimento científico e tecnológico, problemas altamente complexos puderam ser simulados computacionalmente utilizando modelos matemáticos que permitiram incluir um número muito maior de variáveis. Alguns desses problemas estão relacionados com a radiação acústica de fontes sonora, cuja modelagem é de fundamental importância para compreender a propagação das ondas acústicas e, conseqüentemente, desenvolver mecanismos para redução de ruídos acústicos. A propagação de ondas acústicas envolve fenômenos diferentes como radiação, absorção, transmissão e reflexão. A formulação analítica da Equação linear da onda acústica é obtida através da equação de Conservação da Quantidade de Movimento, equação de Estado e de Continuidade. A partir dessas equações, encontra-se a equação diferencial de Helmholtz que descreve o problema da radiação acústica. Nesse trabalho é obtida a solução da equação diferencial de Helmholtz para um cilindro infinito pulsante em um meio livre e homogêneo. A solução analítica é implementada e os resultados obtidos são comparados com os da literatura. A formulação numérica para este problema é obtida usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Este método apresenta grande poder para solução de determinados problemas acústicos em campo aberto, em relação aos métodos diferenciais. O MEC*

reduz a dimensão do problema, simplificando com isso os dados de entrada a serem trabalhados e reduzindo o tempo computacional utilizado.

1. INTRODUÇÃO

O som pode ser definido como uma variação da pressão ambiente detectável pelo sistema auditivo e o ruído como um som sem harmonia. Um mecanismo bastante comum para gerar sons consiste em fazer vibrar uma estrutura. Estruturas vibrantes movimentam ciclicamente as moléculas do ar ao seu redor, gerando localmente concentração e rarefação destas, o que provoca variações de pressão.

A propagação sonora ao ar livre é normalmente estudada em termos de três componentes: a fonte sonora, a trajetória de transmissão e o receptor. Primeiramente, a fonte emite uma certa potência sonora, gerando um nível sonoro que pode ser medido nas proximidades da fonte. A partir daí, o nível sonoro é atenuado à medida que o som se propaga, entre a fonte e o receptor, ao longo de determinada trajetória.

A modelagem da radiação acústica é de fundamental importância para se compreender a propagação das ondas acústicas e, conseqüentemente, desenvolver mecanismos para atenuação de ruídos acústicos. Para estimativas de níveis de pressão sonora, é preciso conhecer os níveis de potência sonora das fontes em questão.

A distribuição de pressão em fluido sujeita a uma fonte de vibração é dada pela equação de Helmholtz. A dedução desta equação começa pelas equações que governam os fluidos, considerando algumas restrições.

Neste trabalho é apresentada a solução analítica da equação de onda para um cilindro infinito que está vibrando (expandindo e contraindo) uniformemente na direção radial com amplitude constante. Essa solução encontrada é então comparada com a literatura. Uma formulação numérica para este problema também é apresentada, através da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno. Atualmente, o Método dos Elementos de Contorno é um dos métodos mais avançados e utilizados especialmente quando se trata de problemas considerando meios infinitos e semi-infinitos, pois permite a redução da dimensão do problema, reduzindo o número de equações utilizadas, permitindo a solução apenas no contorno, sem necessidade de se analisar todo o seu domínio.

A solução numérica para o problema descrito, usando o Método dos Elementos de Contorno, está em fase final de implementação.

2. EQUAÇÃO DE ONDA

A equação que governa o fenômeno da radiação acústica é encontrada através as equações de estado, de conservação da massa, e da conservação da quantidade de movimento.

Para meios fluidos, a equação de estado relaciona grandezas físicas que descrevem o comportamento termodinâmico do fluido.

$$P - P_0 = \beta \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \quad (1)$$

onde P é a pressão instantânea em um ponto, P_0 é a pressão de equilíbrio no fluido, β é o módulo adiabático (coeficiente de expansão térmica do fluido), ρ é a densidade instantânea em um ponto e ρ_0 é a densidade de equilíbrio do fluido.

Podemos definir a condensação s em um ponto como a variação da densidade de

equilíbrio $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ e expressar a Equação

(1) em termos da pressão acústica p e da condensação s

$$p \approx \beta s \quad (2)$$

onde $p = P - P_0$ é a pressão acústica.

Esta aproximação é limitada às ondas de amplitudes relativamente pequenas cuja mudança na densidade do meio é pequena comparada com seu valor de equilíbrio, isto é, a condensação s deve ser muito pequena, $|s| \ll 1$, Kinsler et al., (1982). Esta suposição é necessária, para chegar a uma teoria simples para sons em fluidos, que descreve adequadamente a maioria dos fenômenos comuns em acústica.

Para relacionar o movimento do fluido com sua compressão ou expansão, precisamos de uma função que relacione a velocidade \vec{u} da partícula do fluido com sua densidade instantânea ρ .

Considera-se um elemento infinitesimal de volume de fluido, fixo no espaço. A equação de continuidade relaciona a taxa de crescimento de massa nesse elemento de volume, com o fluxo de massa através da superfície fechada que o envolve. Uma vez que o fluxo de massa deve ser igual à taxa de crescimento, obtem-se a equação de continuidade.

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

A equação de movimento relaciona a pressão acústica p com a velocidade \vec{u} instantânea de partícula, para um fluido adiabático e não viscoso, isto é, os efeitos da viscosidade¹ do fluido são desprezados. Dessa maneira encontra-se a equação de Euler (Equação de força) para fenômenos acústicos de pequena amplitude.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (4)$$

¹ Grau de adesão entre as moléculas de fluido.

Combinando as Equações (1), (3) e (4) obtém-se a equação de onda linearizada, para a propagação de sons em fluidos, expressa em termos da pressão acústica

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (5)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano e $c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$ é a velocidade de propagação da onda acústica no meio.

Para fluidos não viscosos, a velocidade da partícula é irrotacional, $\nabla \times \vec{u} = 0$. Isso significa que a velocidade pode ser escrita como o gradiente de uma função escalar ϕ , denominada potencial de velocidade, $\vec{u} = \nabla \phi$. Dessa maneira, obtém-se a equação de onda linearizada, expressa em termos do potencial de velocidade de onda acústica:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (6)$$

Para a solução da Equação (6), supõe-se o potencial de velocidade com dependência harmônica no tempo. A partir da equação (6), encontra-se a Equação de Helmholtz independente do tempo para um meio sem perdas, expressa em termos de potencial de velocidade de onda acústica:

$$\nabla^2 \phi_f(\vec{r}) + k^2 \phi_f(\vec{r}) = 0 \quad (7)$$

onde ϕ_f representa a parte espacial do potencial de velocidade, ω representa a frequência angular da vibração e k é o número de onda.

3. A SOLUÇÃO ANALÍTICA

Utilizando-se o método de separação de variáveis, obtém-se a parte espacial da solução da Equação de Helmholtz, dada pela Equação (6):

$$\phi(r, \psi, z) = -\frac{V_0}{k} \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)}, \quad r \geq a \quad (8)$$

onde $H_0^{(2)}(u)$ e $H_1^{(2)}(u)$ são as funções de Hankel do 2º tipo e de ordem 0 e 1, respectivamente, k é o número de onda, a é o raio do cilindro, r é a direção radial do potencial de velocidade.

A solução, dada pela Equação (8) é obtida para o caso especial de radiação uniforme (modo monopolo), isto é, a superfície do cilindro está vibrando uniformemente na direção radial com uma amplitude de V_0 metros por segundo, numa frequência de f hertz.

4. RESULTADOS E COMPARAÇÕES

A solução analítica da equação diferencial de Helmholtz foi implementada no software MatLab e os resultados obtidos foram comparados com os obtidos por Papini (1999), mostrados na Tabela 1 e exibidos no Gráfico 1. Na análise dos dados, foram calculados o absoluto e_{abs} , e o erro relativo ao resultado obtido por Papini (1999) e_{rel} , definidos da maneira que se segue

$$e_{abs} = val1 - val \quad (9)$$

e

$$e_{rel} = \frac{e}{val1} \quad (10)$$

onde $val1$ é o valor obtido por Papini (1999), val é o valor obtido neste trabalho.

Freq. (Hz)	Analítica Papini	Analítica (Implem.)
62,5	0,7709467	0,7709467
125	0,4193960	0,4193960
250	0,2159032	0,2159032
500	0,1088600	0,1088600

Tabela 1: Comparação de resultados

Freq. (Hz)	Erro absoluto	Erro relativo
62,5	-7,00000E-09	-9,07974E-09
125	7,00000E-09	1,66906E-08
250	1,50000E-08	6,94755E-08
500	1,00000E-09	9,18611E-09

Tabela 2: Erros

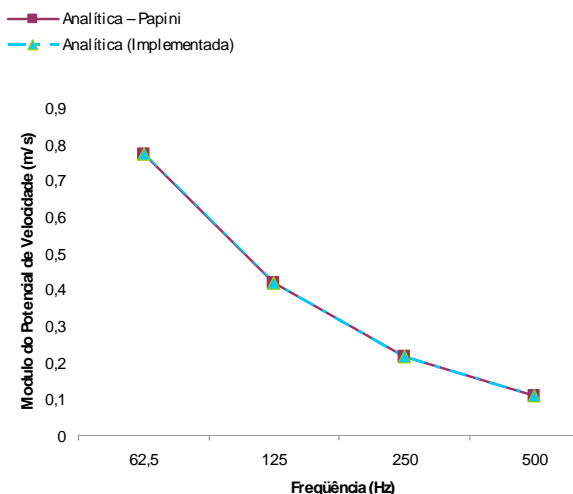


Figura 1: Comparação de resultados implementados

Verifica-se pela Figura 1 que o módulo do potencial de velocidade diminui à medida que a frequência aumenta. Isso pode ser verificado na Equação (8), onde é mostrado que o potencial de velocidade é inversamente proporcional ao número de onda k .

Os resultados obtidos neste trabalho, apresentados nas Tabelas 1 e 2 e mostrados na Figura 1, são bastante satisfatórios quando comparados aos resultados obtidos de Papini (1999), através do cálculo dos erros absoluto e relativo.

5. MÉTODO NUMÉRICO

5.1 Vantagens do Método de Elementos de Contorno

Problemas de engenharia são frequentemente descritos por leis físicas, as quais são comumente expressas por equações diferenciais parciais. Em muitos casos, uma representação matemática alternativa e equivalente do problema é encontrada em termos de equações integrais de contorno. A mais geral e efetiva técnica numérica para solução de equações integrais de contorno é o Método de Elementos de Contorno.

Uma peculiaridade do Método de Elementos de Contorno é que ele provê um modelo contínuo do domínio, uma vez que nenhuma discretização do mesmo é requerida, tornando-o dessa maneira um método eficaz para solução de problemas de domínio

infinito. As soluções nos pontos internos são calculadas após as incógnitas de contorno terem sido calculadas, de maneira semelhante a um pós-processamento.

5.2 Equação Integral de Contorno

A equação diferencial clássica, Equação de Helmholtz, que descreve o problema de radiação acústica de um cilindro infinito pulsante foi determinada nos capítulos anteriores. Para encontrar a Equação Integral no contorno, a partir da Equação de Helmholtz, considera-se um corpo bidimensional B imerso em um domínio infinito Ω , representado na Figura 2 abaixo.

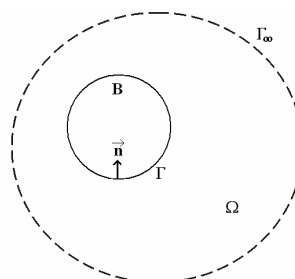


Figura 2 – Representação do domínio e dos contornos

A solução da Equação (7) que descreve o problema analisado sujeito a condição de contorno

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 1 \text{ (condição de Neumann) (11)}$$

é encontrada através da solução de equações integrais de contorno. A Equação (7), que é uma equação diferencial, é válida em todos os pontos do domínio Ω . Para transformá-la em uma equação integral, supõe-se que ela seja ela pode ser não nula em todo o domínio, gerando assim um resíduo r . Com isso pode-se escreve-la da seguinte forma:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) + k^2 \phi(\vec{r}) = r, \forall \vec{r} \in \Omega. \text{ (12)}$$

O resíduo da equação (12) é avaliado em cada ponto. Através do Método dos Resíduos Ponderados, que obtém a soma dos resíduos no domínio. Para isso, insere-se uma função de ponderação u^* para que esta soma seja nula. Dessa forma, obtém-se

$$\int_{\Omega} r u^* d\Omega = 0. \quad (13)$$

Substituindo a equação (12) na equação (13) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) u^* d\Omega = 0. \quad (14)$$

Para obter a solução da equação acima, tem-se que fazer uso de algumas identidades vetoriais, a saber:

$$u^* \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (u^* \nabla \phi) - \nabla u^* \cdot \nabla \phi \quad (15)$$

e

$$\nabla \phi \cdot \nabla u^* = \nabla \cdot (\phi \nabla u^*) - \phi \nabla^2 u^*. \quad (16)$$

Aplicando a propriedade distributiva e a Equação (15) na Equação (14) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u^* \nabla \phi) d\Omega + \int_{\Omega} (u^* k^2 \phi - \nabla u^* \cdot \nabla \phi) d\Omega = 0. \quad (17)$$

Aplicando o teorema da divergência na equação (17) obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u^* \nabla \phi d\Gamma + \int_{\Omega} (u^* k^2 \phi - \nabla u^* \cdot \nabla \phi) d\Omega = 0 \quad (18)$$

Sabe-se que:

$$\nabla \phi \cdot d\Gamma = \nabla \phi \cdot \hat{n} d\Gamma = \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (19)$$

Assim, a Equação (18) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} (u^* k^2 \phi - \nabla u^* \cdot \nabla \phi) d\Omega = 0 \quad (20)$$

Substituindo a equação (16) na equação (20) obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} (u^* k^2 \phi + \phi \nabla^2 u^*) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla u^*) d\Omega = 0. \quad (21) \quad (4.2)$$

Aplicando o teorema da divergência na equação (21) encontra-se

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) d\Omega = 0. \quad (22)$$

Devido à propriedade da função delta de Dirac, temos:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) \phi d\Omega = -\phi(\vec{r}). \quad (23)$$

Substituindo a equação (23) na equação (22) obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - \phi(\vec{r}) = 0. \quad (24)$$

A equação acima foi obtida para pontos de colocação \vec{r} pertencentes ao domínio, onde u^* é a solução fundamental, representada pela função de Green. Esta solução é apresentada para o corpo bidimensional, Ciskowski et al. (1991), como:

$$u^* = \frac{i}{4} H_0^1(kR) \quad (25)$$

e sua derivada é dada por

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = -\frac{ik}{4} H_1^1(kR) \frac{\partial R}{\partial \vec{n}} \quad (26)$$

onde R é a distância entre o ponto \vec{r} e o ponto de aplicação \vec{r}' no domínio Ω .

No Método dos Elementos de Contorno, esta equação é aplicada no Contorno. Quando $\vec{r} = \vec{r}'$, o valor de R será zero, causando um problema de singularidade nas Equações (25) e (26). Uma maneira de evitar esse problema é considerar um ponto \vec{r}' no contorno, mas com o domínio ao seu redor sendo aumentado por um semi-círculo de raio ε , e examinar a solução no limite quando o

raio $\varepsilon \rightarrow 0$. Como este processo limite depende apenas da ordem da singularidade do potencial de velocidade ϕ , que é a mesma para os operadores de Helmholtz e Laplace, segundo Papini, (1999), é realizado um estudo das integrais de contorno da equação (24) utilizando a solução fundamental para a equação de Laplace no domínio Ω . Dessa forma, chega-se na Equação Integral no Contorno:

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\vec{\Gamma} - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial n} d\vec{\Gamma} = \frac{1}{2} \phi(Y). \quad (27)$$

Uma maneira mais geral de representá-la, na qual \vec{r}' pode estar localizado no domínio, no contorno ou fora do domínio, pode ser formulada utilizando-se um termo livre $c(\vec{r}')$ relacionado à posição de \vec{r}' ,

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = c(Y) \phi(Y). \quad (28)$$

Se o ponto \vec{r}' pertencer ao domínio externo ao corpo estudado, seu valor será 0, se o ponto pertencer ao contorno então seu valor será $\frac{1}{2}$ e 1 se o ponto pertencer ao interior do corpo, Ciskowski et al., (1991)

5.3 Discretização das Variáveis

Para a discretização das variáveis físicas e geométricas do problema, o contorno é discretizado em N elementos. Assume-se uma distribuição constante das variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ ao longo dos elementos em que o contorno foi discretizado. Assim, das Equações (23) e (24) pode-se escrever

$$\frac{1}{2} \phi_j(\vec{r}') + \sum_{j=1}^N \phi_j(\vec{r}') \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} d\Gamma(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \int_{\Gamma_j} u^*(\vec{r}, \vec{r}') d\Gamma(\vec{r}) \quad (29)$$

As integrais $\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma$ e $\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$ na

equação acima são chamadas de coeficientes de influência, pois relacionam a influência da

solução no ponto P, quando a solução fundamental é integrada sobre o elemento Q. Renomeando as integrais, tem-se

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (30)$$

e

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \quad (31)$$

onde i representa o ponto de colocação e j o elemento em consideração a ser integrado. Assim a Equação (29) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \phi_j(\vec{r}') + \sum_{j=1}^N \phi_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} G_{ij} \quad (32)$$

Denominando H_{ij} por

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{para } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{para } i = j \end{cases} \quad (33)$$

pois $\phi(\vec{r}')$ é zero para os elementos que não contém a singularidade e um para os que contém. Dessa forma, chega-se a seguinte equação

$$\sum_{j=1}^N \phi_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (34)$$

onde $q = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 1$ (condição de Neumann) conforme definido anteriormente. No caso mais geral, as variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ são aproximadas por funções de interpolação da forma

$$\phi(Q) = \sum_{m=1}^E \phi_m N_m(Q) \quad (35)$$

onde E representa o grau da função interpoladora. Assume-se que a posição do nó i também varia de 1 a N. Assim, a solução fundamental é aplicada em cada nó, o que possibilita verificar a influência de todos os outros elementos no nó da singularidade e dele nele mesmo, obtendo-se um sistema de equações expresso na forma matricial, para cada ponto do contorno, como segue

$$H\vec{\phi} = G\vec{q} \quad (36)$$

onde H e G são duas matrizes N x N, $\vec{\phi}$ é um vetor de dimensão N e \vec{q} é um vetor unitário de dimensão N.

Inserindo-se todos os elementos das matrizes H e G correspondentes às condições de contorno desconhecidas do lado esquerdo e aqueles correspondentes às condições de contorno conhecidas do lado direito, e multiplicando as matrizes do lado direito, forma-se o seguinte sistema de equações:

$$A\vec{y} = \vec{b} \quad (37)$$

onde \vec{y} é o vetor dos valores de contorno desconhecidos de $\vec{\phi}$. O vetor \vec{b} é encontrado multiplicando as colunas correspondentes de H ou de G pelos valores conhecidos de $\vec{\phi}$ e \vec{q} . Uma desvantagem do Método de Elementos de Contorno é que a matriz do sistema final é cheia e não simétrica.

Após a resolução no contorno é possível calcular qualquer valor interno do potencial ou de sua derivada.

6. CONCLUSÃO

A formulação analítica do problema de radiação acústica de um cilindro infinito pulsante foi realizada neste trabalho, onde foi obtida a solução para o caso em que a superfície do cilindro está vibrando uniformemente na direção radial com uma amplitude de V_0 metros por segundo, numa frequência de f hertz. A solução analítica foi implementada e comparada com os valores encontrados por Papini (1999), onde se observou que os resultados foram bastante satisfatórios.

Foi realizado o estudo da formulação numérica do mesmo problema, através do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Foi utilizada a formulação direta do MEC escolhida para a solução da Equação de Helmholtz, utilizando elementos de contorno lineares. Nessa formulação do MEC, foi obtida a equação integral de contorno para a equação que descreve o problema da radiação acústica de um cilindro infinito pulsante. O

desenvolvimento matemático das integrais de contorno, através do MEC, às vezes, não é tão fácil. As dificuldades estão relacionadas com as soluções fundamentais requeridas nessa formulação que envolvem as Funções de Hankel e Bessel. Além disso, não se pode esquecer dos problemas de singularidades de algumas integrais e que a matriz do sistema final é cheia e não simétrica.

A solução numérica, através do método direto do MEC, está em fase final de implementação.

7. REFERÊNCIAS

Brebbia, C. A., Walker, S., Boundary Element Techniques in Engineering. London, 1980.

Chertock, George, Sound Radiation from Vibrating Surfaces, The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 36, Número 7, Julho 1964, Páginas 1305 – 1313.

Ciskowski, R.D., Brebbia, C.A. Boundary Element Methods in Acoustics. Southampton-Boston: Computational Mechanics Publications, 1991.

Debain, E.P., Trevelyan, J., Bettess, P., Wave Boudary Elements: a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves. Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 28, Issue 2, February 2004, Pages 131-141

Kinsler, L.E., Frey, A.R., Coppens, A.B., Sanders, J.V. Fundamentals of Acoustics. New York: John Wiley & Sons, 1982.

Papini, G. S., Estudo Numérico de Barreiras Acústicas. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte, 1999.

Yoon, W.S., Park, J.M., Eversman, W. Two-Dimensional radiation and scattering at short wave length, Journal of Vibration and Acoustics, V. 112, 1990.

Ziomek, L.J. Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing. Boca Raton: CRC Press, 1995.