

Aproximação para Equações de Pressão e Velocidade com Formulação Mista de Mínimos Quadrados

Kennedy Morais Fernandes

Campus Regional Instituto Politécnico - IPRJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
28.630-050, Nova Friburgo, RJ
E-mail: kfernandes@iprj.uerj.br

Regina Célia Paula Leal Toledo

Instituto de Computação - IC
Universidade Federal Fluminense - UFF
24.210-240, Niterói, RJ
E-mail: leal@ic.uff.br.

Resumo: *O escoamento miscível incompressível em meios porosos, caracterizando o processo de recuperação terciária em reservatórios de petróleo, é modelado matematicamente por um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares, com condições de contorno e condições iniciais adequadas. O modelo matemático consiste de um sub-sistema elíptico envolvendo os campos de pressão e velocidade, oriundo da lei de conservação de massa e Lei de Darcy, e uma equação de transporte, predominantemente convectiva para a concentração, sendo essa a variável de maior interesse. Várias formulações variacionais têm sido empregadas para resolver este problema, visando a determinação precisa da velocidade. Neste trabalho o método dos elementos finitos com a formulação variacional de mínimos quadrados é aplicada ao sub-sistema elíptico do problema. Com o acréscimo da equação do rotacional nulo obtém-se convergência na norma H_1 tanto para a pressão como para a velocidade. Resultados numéricos são apresentados e comparados com os descritos na literatura.*

Introdução

No escoamento miscível incompressível em meios porosos a variável de maior interesse é a concentração do fluido injetado entretanto, em se tratando de escoamento predominantemente convectivo é fundamental a determinação precisa da velocidade [2].

Vários tipos de aproximações, utilizando o método dos elementos finitos baseado em formulações de Galerkin, são empregadas para resolver este problema. Dentre estes, podemos destacar os seguintes trabalhos: Castro [1], Garcia [3], Karam Filho [4], Malta [6] e Ney [7].

Formulações variacionais de mínimos quadrados em sua forma clássica têm a desvantagem de requerer maior grau de regularidade dos espaços de aproximação. Essas formulações são aplicadas em muitos problemas reescrevendo as equações que descrevem o fenômeno físico como um sistema equivalente de equações diferenciais de primeira ordem, reduzindo assim, a necessidade de maior grau de regularidade dos espaços de aproximação [5, 8].

Apresentamos neste trabalho formulações de mínimos quadrados aplicadas ao sub-sistema elíptico que calcula a pressão e a velocidade. Como a velocidade, e não a pressão, aparece na equação de concentração que faz parte do modelo matemático que simula o escoamento miscível, atenção especial deve ser dada a obtenção de aproximações precisas para este campo, tentando minimizar os erros na aproximação da concentração a não afetar a sua precisão.

Para melhorar as taxas de convergência para velocidade apresentamos também a formulação de mínimos-quadrados aplicada a esse problema, com a inclusão do termo do rotacional nulo. Exemplos são apresentados para avaliar resultados das formulações apresentadas.

Definição do problema

Consideremos, por simplicidade, $\Omega \subset R^2$ um domínio limitado, com fronteira Γ regular, tal que:

$$\Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$$

onde \emptyset é o conjunto vazio.

Descrevemos o problema como:

Para um dado valor f , achar os campos \mathbf{u} e p que satisfazem a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = -k(\mathbf{x})\nabla p \quad \text{em } \Omega \quad (2)$$

$$p = \delta \quad \text{em } \Gamma_p \quad (3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (4)$$

sendo:

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, o vetor velocidade;
- p , o valor escalar que define a pressão;
- $k(\mathbf{x})$, a permeabilidade do meio poroso.

Formulação Mista em Pressão e Velocidade

Para esse problema, como mostrado em [5], mesmo se trabalhando com formulação mista em pressão e velocidade, recai-se num problema de minimização do funcional, não exigindo dessa forma compatibilidade entre os espaços de aproximação.

Assim, a formulação variacional de mínimos quadrados é aplicada da seguinte forma:

$$J(u, p) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u} - f)(\nabla \cdot \mathbf{u} - f) + (\mathbf{u} + k(\mathbf{x})\nabla p) \left(k^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \nabla p \right) d\Omega \right] \quad (5)$$

sendo \mathbf{u} o vetor velocidade, p a pressão e $k(\mathbf{x})$ uma matriz diagonal.

Associado à minimização de J , temos o seguinte problema variacional:

Problema P_1 : Achar \mathbf{u} e p , tal que:

$$B(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{q}, \eta\}) = F(\mathbf{q}, \eta) \quad (6)$$

sendo $B(\cdot, \cdot)$ e $F(\cdot)$, definidos como

$$B(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{q}, \eta\}) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{q}) +$$

$$(\mathbf{u} + k(\mathbf{x})\nabla p) \left(k^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{q} + \nabla \eta \right) d\Omega \quad (7)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (8)$$

A análise de erro dessa formulação com o método dos elementos finitos apresenta a seguinte taxa de convergência [5, 8]:

$$\|p - p_h\|_{H_1} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H_{div}} \leq ch^j \quad (9)$$

sendo j o grau do polinômio de interpolação tanto da variável p quanto da variável \mathbf{u} . Polinômios de diferentes graus também podem ser utilizados para aproximar cada uma das variáveis desse problema, como apresentado em [8].

Formulação com Rotacional

Para melhorar a aproximação para o campo de velocidades, que é a variável de maior interesse do problema, foi proposto em [5, 8] uma formulação incluindo a equação do rotacional nulo do campo \mathbf{u} .

Dessa forma o sub-sistema elíptico é reescrito da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = -k(\mathbf{x})\nabla p \quad \text{em } \Omega \quad (11)$$

$$k^{-1}(\mathbf{x})\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (12)$$

$$p = \delta \quad \text{em } \Gamma_p \quad (13)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (14)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_p \quad (15)$$

O funcional de Mínimos Quadrados para o problema em questão é

$$J(u, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u} - f)(\nabla \cdot \mathbf{u} - f) + (k^{-1}(\mathbf{x})\nabla \times \mathbf{u})(k^{-1}(\mathbf{x})\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} + k(\mathbf{x})\nabla p)(k^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \nabla p) d\Omega \quad (16)$$

com \mathbf{u} , p e f e k definidos anteriormente.

Fazendo-se a variação de J , temos o seguinte problema variacional:

Problema P_2 : Achar (\mathbf{u}, p) , tal que:

$$\mathbf{B}\{(\mathbf{u}, p); (\mathbf{q}, \eta)\} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (17)$$

com $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$ e $\mathbf{F}(\cdot)$, definidos a seguir.

$$\mathbf{B} \{(\mathbf{u}, p); (\mathbf{q}, \eta)\} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{q}) + (\mathbf{u} + k(\mathbf{x}) \nabla p) (k(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{q} + \nabla \eta) + (k(\mathbf{x})^{-1} \nabla \times \mathbf{u}) (k(\mathbf{x})^{-1} \nabla \times \mathbf{q}) d\Omega \quad (18)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \int f \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (19)$$

Observa-se que esse sistema mantém o número de incógnitas nodais e conseqüentemente a ordem do sistema de equações.

Para essa formulação a taxa de erro [5, 8] do problema discretizado pelo método dos elementos finitos encontrada é:

$$\|p - p_h\|_{H_1} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H_1} \leq ch^j \quad (20)$$

onde j é o grau do polinômio de aproximação tanto para p quanto para \mathbf{u} , h é o intervalo de discretização espacial e c uma constante.

Nesse caso, pode-se também obter a taxa de erro em L^2 [8] dada por:

$$\|p - p_h\|_{L_2} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L_2} \leq ch^{j+1} \quad (21)$$

para interpolações de igual ordem, embora diferentes ordens de aproximações possam ser utilizadas para aproximar p e \mathbf{u} [8].

Resultados Numéricos

Para testar as formulações propostas apresentamos a seguir resultados para um domínio homogêneo e heterogêneo, tanto para malha regular quanto para malha apresentada na Figura 1, utilizando as formulações de mínimos quadrados descritas nos problemas P_1 e P_2 .

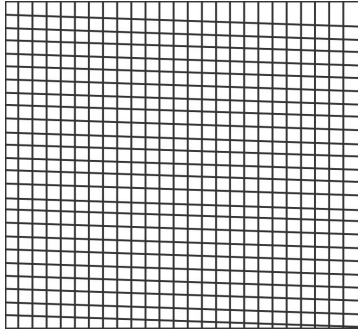


Figura 1: Malha inclinada

Para estes exemplos, as matrizes \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 e \mathbf{B} que descrevem o sistema de equações diferenciais, podem ser dadas por:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

para

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Para formulação com o rotacional temos:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Exemplo 1

Como primeiro exemplo apresentamos um domínio quadrado de dimensão 1, e um meio homogêneo com $k = 0,1 \cdot \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade.

As condições de contorno prescritas são a pressão em $x = 0$, $P(0, y) = 1$, e $x = 1$, $P(1, y) = 0$ e fluxo normal nulo em $y = 0$ e $y = 1$.

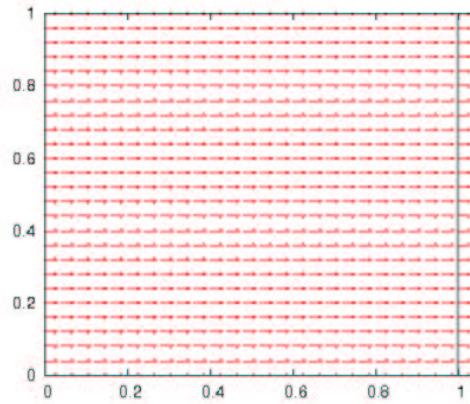


Figura 2: Permeabilidade homogênea

Para todos os exemplos desse trabalho o domínio foi discretizado em 25×25 elementos isoparamétricos bilineares com integração de Gauss com 2×2 pontos.

Resultados para formulação sem rotacional e com rotacional são apresentados nas Figuras 2 e 3, para discretização com malha regular.

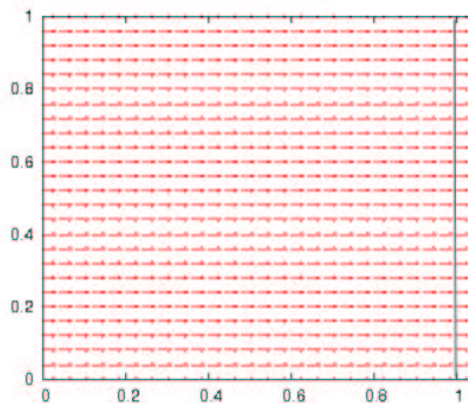


Figura 3: Permeabilidade homogênea e formulação com rotacional

Nas Figuras 4 e 5 apresentamos também resultados sem rotacional e com rotacional com uma malha inclinada em relação aos eixos cartesianos (Figura 1), como sugerido em [3].

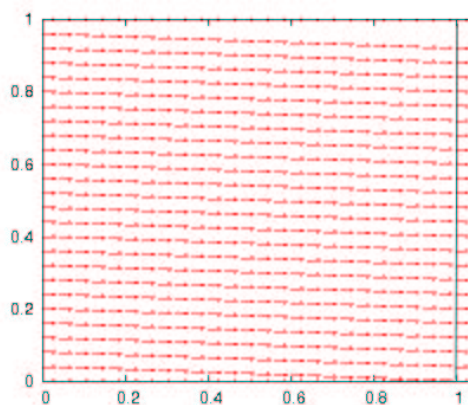


Figura 4: Permeabilidade homogênea e malha inclinada

Exemplo 2

A seguir, o problema é aplicado a um meio heterogêneo (diferentes permeabilidades) como apresentado na Figura 6.

A Figura 7 apresenta resultados da formulação sem rotacional, onde podemos observar pequenas oscilações na velocidade próximo

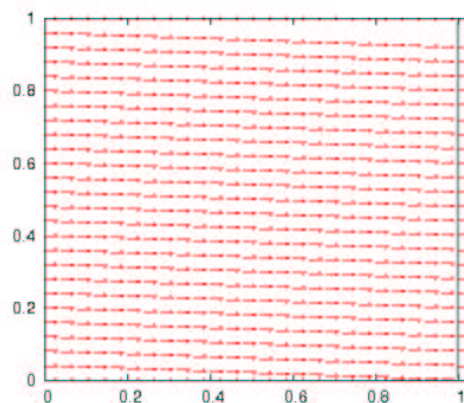


Figura 5: Permeabilidade homogênea, malha inclinada e formulação com rotacional

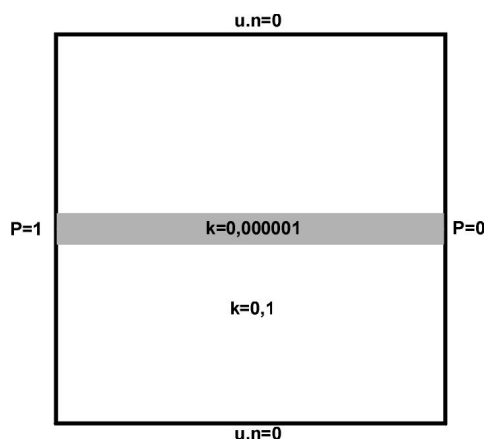


Figura 6: Domínio com permeabilidade heterogênea

à região de baixa permeabilidade. A Figura 8 apresenta resultados da formulação com rotacional onde observa-se a não existência de oscilações e um perfil parabólico para velocidade.

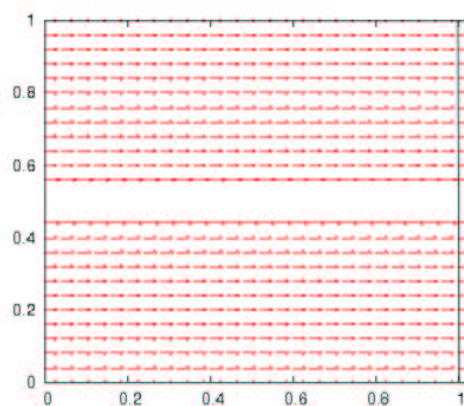


Figura 7: Permeabilidade heterogênea

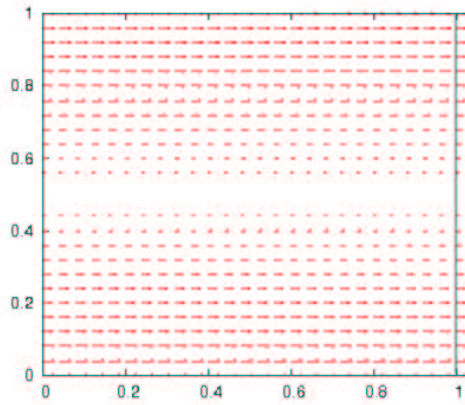


Figura 8: Permeabilidade heterogênea e formulação com rotacional

Também para esse exemplo utilizamos uma malha regular e a malha apresentada na Figura 1, os resultados para a formulação de mínimos quadrados e formulação de mínimos quadrados com rotacional, são apresentados nas Figuras 7, 9 e nas Figuras 8, 10 respectivamente.

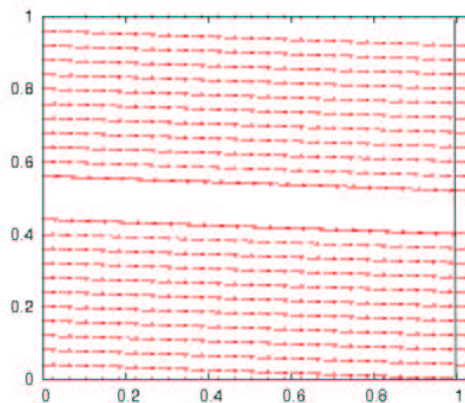


Figura 9: Permeabilidade heterogênea e malha inclinada

Nas Figuras 7 e 9 podemos observar uma pequena oscilação nas velocidades próximo à região de baixa permeabilidade. Com a inclusão da equação $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ à formulação, apresentada nas Figuras 8 e 10, não há mais oscilação e aparece o perfil parabólico não captado em outras formulações, tais como as técnicas de pós-processamento para a velocidade [3] apresentadas nas Figuras 12-15.

Exemplo 3

Neste exemplo o escoamento ocorre em

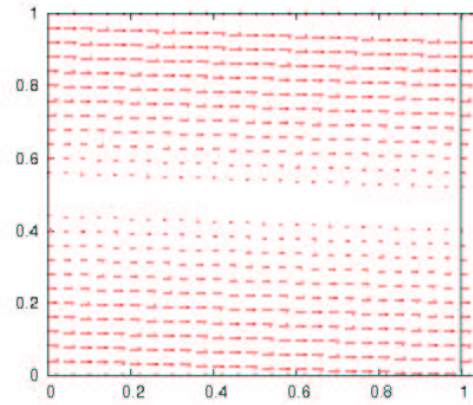


Figura 10: Permeabilidade heterogênea, malha inclinada e formulação com rotacional

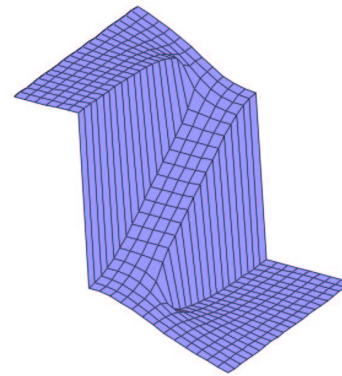


Figura 11: Representação da pressão na formulação com rotacional

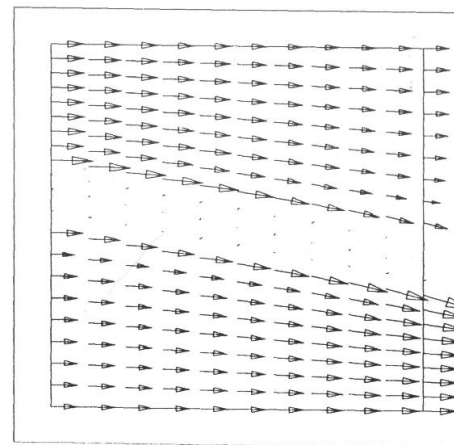


Figura 12: Velocidades obtidas pelo pós-processamento global (contribuição do lado esquerdo) [3]

função da diferença de pressão de uma região confinada nas laterais que possui duas barrei-

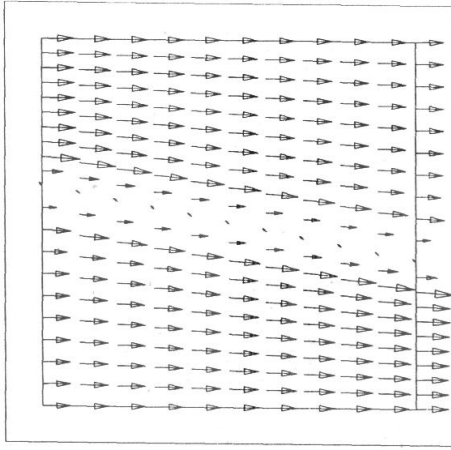


Figura 13: Velocidades obtidas pelo pós-processamento global (contribuição do lado direito) [3]

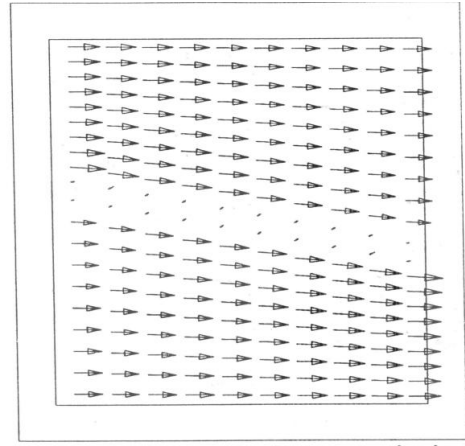


Figura 15: Velocidades obtidas pelo pós-processamento local com tensor de permeabilidade completo [3]

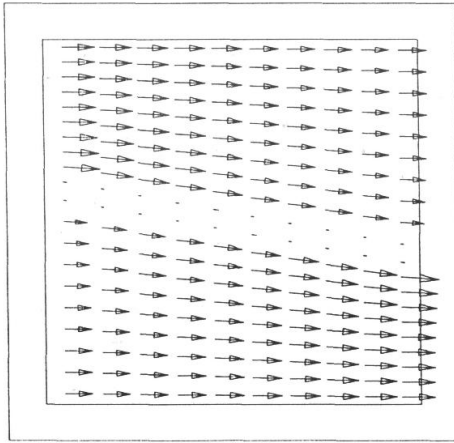


Figura 14: Velocidades obtidas pelo pós-processamento local com tensor de permeabilidade diagonal [3]

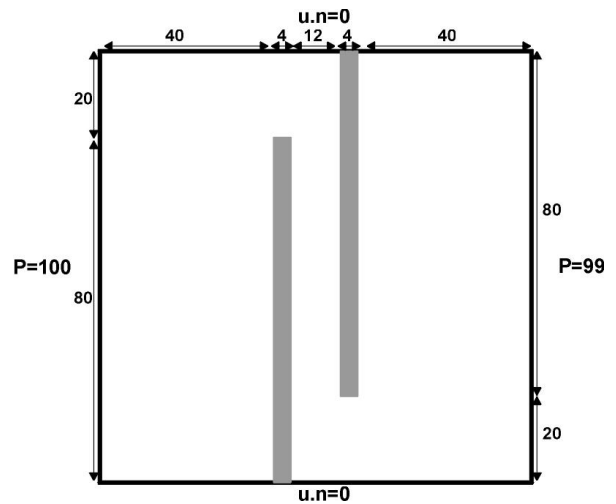


Figura 16: Domínio e condições de contorno [3]

ras perpendiculares à direção de escoamento, formando um canal por onde o fluido deve passar. As barreiras são representadas por região com baixa permeabilidade nas quais o fluido não deve penetrar (Figura 16).

As Figuras 17 e 18 apresentam resultados da velocidade para a formulação sem rotacional e com rotacional respectivamente e a Figura 11 apresenta resultados da pressão encontrada na formulação com rotacional. Pode-se observar nas Figuras 17 e 18 a continuidade das direções preferenciais dos vetores de velocidade.

Conclusão

Para o sub-sistema elíptico observamos, nos exemplos analisados, que a formulação mista

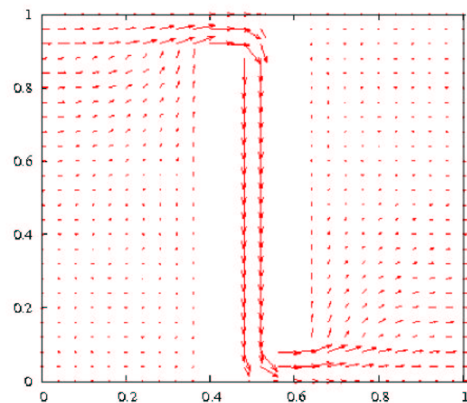


Figura 17: Formulação sem rotacional

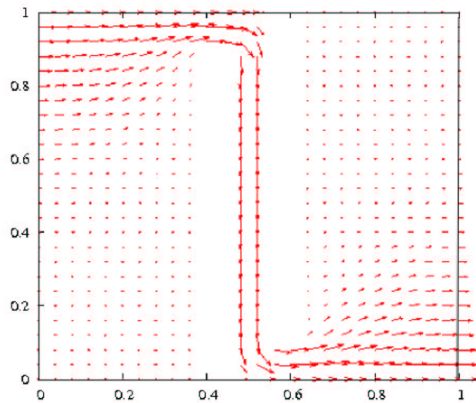


Figura 18: Formulação com rotacional

em pressão e velocidade apresenta resultados comparáveis aos encontrados na literatura para as mesmas aplicações. Apesar de, nesse problema, estarmos resolvendo um sistema de equações com 3 incógnitas por nó, a matriz resultante é simétrica positiva definida.

A inclusão da equação de irrotacionalidade do fluxo, não aumenta o número de equações desse sistema e melhora as taxas de convergência obtidas por essa formulação. Isso pode ser observado no Exemplo 2 onde foi possível captar inclusive, o perfil parabólico do comportamento da velocidade.

Esses resultados mostram que a formulação de mínimos quadrados para problemas estacionários se constituem em uma opção para as formulações clássicas e para as formulações estabilizadas em uso, merecendo continuidade no entendimento de seu comportamento.

Como trabalhos futuros, destacamos: aplicar as formulações de mínimos quadrados no cálculo da concentração de mistura dos fluidos, com as velocidades calculadas neste trabalho; resolver o problema elíptico com campos de permeabilidades estocásticas.

Referências

- [1] R. G. S. Castro, "Análise Numérica de Formulações de Elementos Fintos Espaço-Tempo para Escoamentos Miscíveis", Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Doutorado, 1999.
- [2] R. E. Ewing, "The Mathematics of Reservoir Simulation", Elsevier Scientific Pu-

blishing Company, 1977.

- [3] E. L. M. Garcia, "Formulações de Elementos Finitos Bi e Tridimensionais para Simulação em Paralelo de Escoamentos em Reservatórios de Petróleo", Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE - Tese de Doutorado", 1997.
- [4] J. Karam-Filho, "Uma formulação de Elementos Finitos Mistos para Escoamentos Incompressíveis", Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Mestrado, 1989.
- [5] R. C. P. Leal-Toledo, "Estudo de uma Formulação de Mínimos Quadrados para o Método dos Elementos Finitos", Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE - Tese de Doutorado, 1992.
- [6] S. M. C. Malta, "Análise Numérica de Métodos de Elementos Finitos para Escoamentos Miscíveis", Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Doutorado, 1995.
- [7] W. G. Ney, "Um Estudo Comparativo sobre Formulações Estabilizadas e Adaptatividade na Simulação de Deslocamentos Miscíveis em Meios Porosos pelo Método dos Elementos Finitos", Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Mestrado, 2002.
- [8] A. I. Pehlivanov and G. F. Carey, "Error Estimates For Least-Squares Mixed Finite Elements", *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, 28(5), (1994) 499-516.