Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais Clássicos

Fernando Rodrigo Rafaeli
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: fe_ro_rafaeli@yahoo.com.br.

Resumo: *Seja* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *os polinômios de Jacobi que são ortogonais em* $[-1, 1]$ *com relação a função peso* $\omega(x; \alpha, \beta) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}$, *onde* $\alpha, \beta > -1$. *Denotemos por* $x_{nk}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \ldots, n$, *os zeros de* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *enumerados em ordem decrescente. O comportamento desses zeros em relação aos parâmetros tem sido de grande interesse. Uma dessas razões é devido à sua bonita interpretação eletrostática. Neste trabalho, descreveremos esta interpretação e apresentaremos as várias contribuições que surgiram ao longo dos últimos 25 anos sobre o comportamento de* $x_{nk}(\alpha, \beta)$.

Introdução. Consideremos o seguinte campo eletrostático no intervalo $[-1, 1]$. Sejam $\alpha, \beta > -1$ e duas cargas fixas com forças $(\alpha + 1)/2$ e $(\beta + 1)/2$ localizadas em 1 e -1, respectivamente. Suponha que existam n cargas livres, cada uma com força um, localizadas em $(-1, 1)$. Consideremos o campo elétrico que obedece à lei do potencial logaritmo [11]. Do ponto de vista da eletrostática, isto significa que as cargas estão distribuídas ao longo de fios infinitos, perpendiculares à reta real. Portanto, se as cargas livres têm posições $x_1, \ldots, x_n$, a energia do campo é dada por

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i < k \le n} \log \frac{1}{|x_i - x_k|} \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \left(\log \frac{(\alpha+1)/2}{|1 - x_k|} + \log \frac{(\beta+1)/2}{|1 + x_k|} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

A única posição das cargas para a qual a energia tem mínimo global, é quando $x_1, \ldots, x_n$ coincidem com os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Esta bela interpretação deve-se a Stieltjes [13, 14, 15] que provou que a energia do campo tem mínimo local nos zeros do polinômio de Jacobi de grau n. Szegő [16, Seção 6.7] provou que, de fato, a energia tem um único mínimo, estabelecendo desta forma a estabilidade do equilíbrio. Estes resultados são resumimos no seguinte teorema:

Teorema (Stieltjes & Szegő): *Sejam* $\alpha > -1$, $\beta > -1$ *e* $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $-1 \le x_i \le 1$, $i = 1, \ldots, n$, *um sistema de valores tal que a expressão (1) se torna mínima. Então,* $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ *são os zeros do n-ésimo polinômio de Jacobi* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Para exemplificar, consideremos $n = 7$, $\alpha = 2.0$ e $\beta = 3.0$. Assim obtemos o gráfico de $P_7^{(2,3)}(x)$

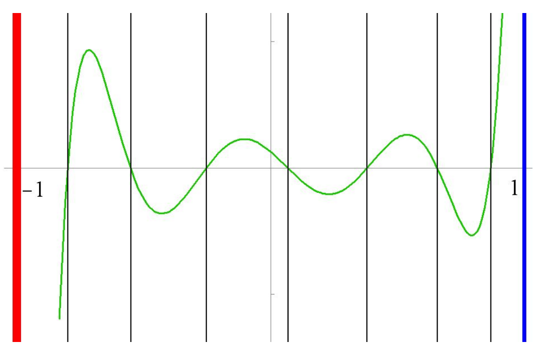

Figura 1: $n = 7$, $\alpha = 2.0$ e $\beta = 3.0$

Andrey Markov [17] (ver também [16, Teorema 6.12.1]) provou que todos os $x_{nk}(\alpha, \beta)$ são funções crescentes de β e decrescentes de α. Este fato é intuitivamente claro devido à interpretação eletrostática descrita desde que todas as cargas são positivas e repelem-se entre si. Este resultado é escrito como:

Teorema (Markov): *Sejam* $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ *os zeros do polinômio* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. *Então*

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0 \ e \ \frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0, \ 1 \le k \le n.$$

É interessante observar o que acontece com os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ quando variamos os parâmetros α e β simultaneamente. Um exemplo típico é quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ reduzindo assim os polinômios de Jacobi aos polinômios ultraesférico (Gegenbauer) $C_n^{(\lambda)}(x)$. Estes polinômios são ortogonais em $[-1, 1]$ com relação à função $w(x; \lambda) = (1 - x^2)^{\lambda - 1/2}$, $\lambda > -1/2$. Pela interpretação eletrostática, é intuitivamente claro que aumentando a carga de λ os zeros $x_{n,k}(\lambda)$ de $C_n^{(\lambda)}(x)$ se deslocam em direção à origem, i.é, os zeros positivos decrescem e os zeros negativo crescem. Este resultado é consequência imediata do Teorema de Markov. Stieltjes [15] também provou este fato:

Teorema (Markov & ***Stieltjes):*** *Sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n-ésimo polinômio de Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$, arranjados em ordem decrescente. Então,*

$$\frac{\partial x_{n,k}(\lambda)}{\partial \lambda} < 0, \; k = 1, \ldots, [n/2] \, .$$

Formulação do Problema: Uma questão importante e que tem despertado o interesse de vários matemáticos é o comportamento dos zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ e $x_{n,k}(\lambda)$ com relação aos parâmetros α, β e λ, mais precisamente, são estes os problemas:

Problema1: *Qual é a velocidade com que os zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \ldots, n$, do n-ésimo polinômio de Jacobi crescem com β e decrescem com α.*

Problema2: *Qual é a velocidade com que os zeros $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, [n/2]$, do n-ésimo polinômio de Gegenbauer decresce com λ.*

Estas questões são impossíveis de respondelas diretamente porque isto implica em calcular explicitamente as derivadas de todos os zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ e $x_{n,k}(\lambda)$. Por este motivo, os seguintes problemas foram considerados:

Problema3 (possível formulação): *Qual é a função "extrema" $f_n(\alpha, \beta)$ positiva e suave que força o produto $f_n(\alpha, \beta)x_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \ldots, n$, decrescer com β e crescer com α.*

Problema4: *Qual é a função "extrema" $f_n(\lambda)$ positiva e suave que força o produto $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, [n/2]$, crescer com λ.*

Primeiramente, resolveu-se o Problema 4, i.e, a questão sobre os zeros dos polinômios de Gegenbauer. Ela teve inicio em 1981 com Laforgia [9] seguido por outros matemáticos, sendo que foi Dimitrov [2] em 1996 quem fez uma análise profunda e detalhada do problema e descreveu detalhadamente o significado "extrema" da função multiplicadora deste problema. Descreveremos isto (à análise feita por ele) a seguir:

Dimitrov considerou, primeiramente, o problema de uma forma geral, ou seja, procurar (determinar) funções $f_{n,k}(\lambda)$ tais que o produto

$$Z_{n,k}\left(\lambda\right) := \; f_{n,k}\left(\lambda\right) x_{n,k}\left(\lambda\right) \qquad (2)$$

seja uma função crescente de $\lambda > -1/2$, para todo n e para todo k, $1 \leq k \leq [n/2]$. Naturalmente $f_{n,k}(\lambda)$ deve ser positiva e diferenciável. Derivando (2), obtemos

$$0 \leq Z'_{n,k}(\lambda) = f'_{n,k}(\lambda)x_{n,k}(\lambda) + f_{n,k}(\lambda)x'_{n,k}(\lambda).$$

Sabemos que $x_{n,k}(\lambda)$ é uma função positiva e decrescente, logo $x'_{n,k}(\lambda) < 0$. Portanto, se $x_{n,k}(\lambda) > 0$, $f_{n,k}(\lambda) > 0$ e $x'_{n,k}(\lambda) < 0$, então

$$\frac{f'_{n,k}(\lambda)}{f_{n,k}(\lambda)} \geq -\frac{x'_{n,k}(\lambda)}{x_{n,k}(\lambda)}, \; \textit{para } \lambda > -1/2. \qquad (3)$$

Assim, podemos considerar (enunciar) os seguintes problemas:

P1. *Para todo n fixo e $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, determinar a função $f_{n,k}(\lambda)$ positiva e suave para $\lambda > -1/2$, tal que os produtos $Z_{n,k}(\lambda) = f_{n,k}(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ sejam funções crescentes de λ e $f'_{n,k}(\lambda)/f_{n,k}(\lambda)$ seja mínima.*

Decorre imediatamente de (3) que o problema é equivalente ao problema de encontrar $x'_{n,k}(\lambda)/x_{n,k}(\lambda)$. Se procurarmos funções $f_n(\lambda)$ que dependem somente de n, mas não de k, então o problema *P1* pode ser reformulado:

P2. *Para todo inteiro $n \geq 2$ fixo, determinar a função $f_n(\lambda)$ positiva e suave para $\lambda > -1/2$, tal que para todo k, $1 \leq k \leq [n/2]$, os produtos $Z_n(\lambda) = f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ sejam funções crescentes de λ e $f'_n(\lambda)/f_n(\lambda)$ seja mínima.*

Se estivermos interessados em uma função universal, o problema pode ser reescrito da seguinte forma:

P3. *Qual é a função $f(\lambda)$, positiva e suave para $\lambda > -1/2$, tal que, para todo $n \geq 2$ fixo, $1 \leq k \leq [n/2]$, os produtos $Z(\lambda) = f(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ sejam funções crescentes de λ e $f'(\lambda)/f(\lambda)$ seja mínima.*

A noção "extrema" para os problemas enunciados é equivalente à minimização dos quocientes $f'_{n,k}(\lambda)/f_{n,k}(\lambda)$, $f'_n(\lambda)/f_n(\lambda)$ e $f'(\lambda)/f(\lambda)$, respectivamente. Obviamente essas exigências determinam uma função conhecida a menos de um fator constante.

Se encontramos a solução geral $f_{n,k}(\lambda)$ de *P1*, que é a mais difícil, então as soluções $f_n(\lambda)$ de *P2* e $f(\lambda)$ de *P3* podem ser consequentemente obtidas, para qualquer $\lambda > -1/2$ fixo, através das fórmulas

$$\frac{f_n'(\lambda)}{f_n(\lambda)} = \max_{1\leq k\leq [n/2]} \frac{f_{n,k}'(\lambda)}{f_{n,k}(\lambda)},$$

e

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \sup_{n\geq 2} \frac{f_n'(\lambda)}{f_n(\lambda)}.$$

Portanto, para resolver esses problemas necessitamos de limites superiores para $-x_{n,k}'(\lambda)/x_{n,k}(\lambda)$.

Assim, depois de esclarecido o significado de função "extrema" descreveremos um breve histórico da solução deste problema. Mencionamos que ele foi resolvido ao longo dos últimos 25 anos em que várias conjecturas e contribuições foram feitas. Como já dissemos, toda esta discussão teve inicio com a pioneira contribuição de Laforgia [9] em 1981 que provou o seguinte resultado:

Teorema (Laforgia, 1981): *Seja* $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, *os zeros de* $C_n^{(\lambda)}(x)$ *arranjados em ordem decrescente. Então*

$$\lambda x_{n,k}(\lambda)$$

cresce para $0 < \lambda < 1$.

Em [10] ele conjecturou que este resultado é válido para todo $\lambda > 0$, i.e,

Conjectura (Laforgia, 1985): *Seja* $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, *os zeros de* $C_n^{(\lambda)}(x)$ *arranjados em ordem decrescente. Então*

$$\lambda x_{n,k}(\lambda)$$

cresce para todo $\lambda > 0$.

Mais tarde, Ismail e Letessier [8] refinaram esta conjetura com uma função que possui o comportamento assintótico preciso.

Conjectura (Ismail & Letessier, 1988): *Seja* $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, *os zeros de* $C_n^{(\lambda)}(x)$ *arranjados em ordem decrescente. Então*

$$\sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda)$$

cresce para todo $\lambda > 0$.

Finalmente, Askey achou que a função "extrema" e universal, i.e, aquela que não depende de n, seria $f(\lambda) = \sqrt{\lambda+1}$. A sugestão de Askey foi reformulada como conjectura por Ismail [7] em 1989. Denominamos esta conjectura por LILAC em homenagem a Laforgia, Ismail, Letessier e Askey.

Conjectura (LILAC): *Seja* $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, *os zeros de* $C_n^{(\lambda)}(x)$ *arranjados em ordem decrescente. Então*

$$\sqrt{\lambda+1}x_{n,k}(\lambda)$$

cresce para todo $\lambda > -1/2$.

Ahmed, Muldoon e Spigler [1] em 1986 refinaram um resultado de Spigler [12] demonstrando o seguinte:

Teorema (Ahmed, Muldoon & Spigler, 1986): *Seja* $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, *os zeros de* $C_n^{(\lambda)}(x)$ *arranjados em ordem decrescente. Então*

$$\left(\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}\right)^{1/2} x_{n,k}(\lambda)$$

cresce para todo $-1/2 < \lambda \leq 3/2$.

Em 1989, Ifantis e Siafarikas [6] provaram a conjectura de Laforgia, Ismail, Letessier e Askey para o maior zero positivo $x_{n,1}(\lambda)$, usando uma técnica de função analítica. O resultado deles é o seguinte:

Teorema (Ifantis & Siafarikas, 1989): *Seja* $x_{n,1}(\lambda)$ *o maior zero de* $C_n^{(\lambda)}(x)$. *Então*

$$\sqrt{\lambda+1}x_{n,1}(\lambda)$$

cresce para todo $\lambda > -1/2$.

Em 1996, Dimitrov [2] provou LILAC para n suficientemente grande. Mais ainda, ele provou esta conjectura para o maior zero $x_{n,1}(\lambda)$ como Ifantis e Siafarikas em [6], usando um método diferente. Os resultados obtidos por ele são:

Teorema (Dimitrov, 1996): *Seja* ν *um inteiro não-negativo. Então para todo* $n > 1 + (\nu^2+3\nu+3/2)^{1/2}$ *e* k, $1 \leq k \leq [n/2]$ *os produtos*

$$\sqrt{\lambda+1}x_{n,k}(\lambda)$$

são funções crescentes de λ *para* $-1/2 < \lambda \leq 3/2 + \nu$.

Corolário (Dimitrov, 1996): *Se* $n > 2$ *e* $1 \leq k \leq [n/2]$ *então*

$$\sqrt{\lambda+1}x_{n,k}(\lambda)$$

é uma função crescente de λ *para* $-1/2 < \lambda \leq 9/2$.

Teorema (Dimitrov, 1996): *Seja $\lambda > -1/2$. Então*
(i) para todo n par

$$\sqrt{\lambda+1}x_{n,1}(\lambda)$$

é uma função crescente de λ.
(ii) para todo $n \geq 3$ ímpar

$$\sqrt{\lambda+2}x_{n,1}(\lambda)$$

é uma função crescente de λ.

Em 1989, Elbert e Siafarikas [5] estenderam o resultado de Ahmed, Muldoon e Spigler [1] de 1986 provando assim a conjectura de Laforgia, Ismail, Letessier e Askey.

Teorema (Elbert & Siafarikas, 1989): *Seja $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, os zeros de $C_n^{(\lambda)}(x)$ arranjados em ordem decrescente. Então*

$$\left(\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}\right)^{1/2} x_{n,k}(\lambda)$$

cresce para todo $\lambda > -1/2$.

Finalmente, em 2002, Dimitrov e Rodrigues [4] provaram que a função

$$f_n(\lambda) = \Big(\lambda + (2n^2+1)/(4n+2)\Big)^{1/2}$$

é de fato assintoticamente extrema. Este resultado é descrito a seguir:

Teorema (Dimitrov & Rodrigues, 2002): *Seja n um inteiro positivo. Se $f_n(\lambda)$ é positiva e $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, são funções crescentes de λ, para $\lambda > -1/2$, então*

$$\frac{f'_{2n}(\lambda)}{f_{2n}(\lambda)} > \frac{1}{2(n+\lambda)} \tag{4}$$

e

$$\frac{f'_{2n+1}(\lambda)}{f_{2n+1}(\lambda)} > \frac{1}{2(n+\lambda+1)}. \tag{5}$$

Além disso, se $\sqrt{\lambda+c_n}x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, são funções crescentes de λ, para $\lambda > -1/2$, então

$$c_{2n} < \frac{4n^2+n+1}{4n+2} \tag{6}$$

e

$$c_{2n+1} < \frac{4n^2+7n+9}{4n+6}. \tag{7}$$

Agora, vamos considerar o Problema 3, que é o caso mais geral. É digno de nota, que ao longo destes ultimos anos, desde a pioneira contribuição de Laforgia sobre os zeros $x_{n,k}(\lambda)$ dos polinômios de Gegenbauer até o resultado de Dimitrov & Rodrigues, nenhum resultado neste sentido sobre os zeros $x_{n,k}(\alpha,\beta)$ dos polinômios de Jacobi tinha sido encontrado (houve muita dificuldade em atacar/resolver este problema). Uma cuidadosa inspeção na evolução das conjecturas e resultados com respeito aos zeros positivos dos polinômios de Gegenbauer, descritos anteriormente, levam as seguintes conclusões (razões) para a falta de resultado nesta direção:
1) $x_{n,k}(\alpha,\beta)$ muda de sinal. Isto indica que ao invés de considerarmos os zeros $x_{n,k}(\alpha,\beta)$, é mais razoável investigar as quantidades $1 - x_{n,k}(\alpha,\beta)$ ou $1 + x_{n,k}(\alpha,\beta)$.
2) Desde que $\sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) \to h_{n,k}$, quantidades que obedecem a comportamentos assintóticos devem ser considerados aqui também. Dica: uma tal fórmula para os zeros do polinômio de Jacobi é (citar?)

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta(1 - x_{n,k}(\alpha,\beta)) = 2x_{n,n-k+1}(\alpha)$$

onde $x_{n,j}(\alpha)$ são os zeros do polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$, arranjados em ordem decrescente.

Depois destas observações e, juntamente com o fato de que $1 - x_{n,k}(\alpha,\beta)$ é função decrescente de β e crescente de α, obtemos a **correta formulação** para o Problema 3.

Problema3' (formulado por Dimitrov & FRR, 2007): *Determine a função "extrema" $f_n(\alpha,\beta)$ positiva e suave que força os produtos*

$$f_n(\alpha,\beta)\ (1 - x_{n,k}(\alpha,\beta)),\ k = 1, \ldots, n,$$

crescerem, como funções de $-1 < \beta < \infty$, e decrescerem, como funções de $-1 < \alpha < \infty$.

Antes de apresentarmos a solução para este problema, descreveremos o exato significado de função extrema para este caso (problema). Consideremos então as quantidades

$$Z_{n,k}(\alpha,\beta) = f_{n,k}(\alpha,\beta)(1 - x_{n,k}(\alpha,\beta))$$

como funções de β, onde $f_{n,k}(\alpha,\beta)$ é também uma função positiva e diferenciável de β, para quaisquer n, k e $\alpha \in (-1,\infty)$. Nos perguntamos que condições adicionais devemos ter sobre

$f_{n,k}(\alpha,\beta)$ para que o produto $Z_{n,k}(\alpha,\beta)$ seja função crescente de β. Desde que

$$0 \leq \frac{\partial Z_{n,k}(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial f_{n,k}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}(1-x_{n,k}(\alpha,\beta)) - f_{n,k}(\alpha,\beta)\frac{\partial x_{n,k}(\alpha,\beta)}{\partial\beta},$$

onde $f_{n,k}(\alpha,\beta) > 0$, $(1-x_{n,k}(\alpha,\beta)) > 0$ e $\partial x_{n,k}(\alpha,\beta)/\partial\beta > 0$, então devemos ter

$$\frac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha,\beta)}{\partial\beta} > -\frac{\partial \ln(1-x_{n,k}(\alpha,\beta))}{\partial\beta}. \quad (8)$$

Portanto, dentre todas as funções $f_{n,k}(\alpha,\beta)$, $n \geq 1$, $k = 1,\ldots,n$, que são suaves com respeito a β e forçam o correspondente produto $Z_{n,k}(\alpha,\beta)$ crescer com β, a melhor possível é aquela que satisfaz (8).

Assim, como no caso dos zeros dos polinômios de Gegenbauer descrito anteriormente, podemos considerar (enunciar) os seguintes problemas com relação aos zeros dos polinômios de Jacobi agora:

P1. *Para todo n fixo e $k = 1,2,\ldots,n$, determinar a função $f_{n,k}(\alpha,\beta)$ positiva e suave para $\alpha,\beta > -1$, tal que os produtos*

$$Z_{n,k}(\alpha,\beta) = f_{n,k}(\alpha,\beta)(1-x_{n,k}(\alpha,\beta))$$

sejam funções crescentes de β e

$$\frac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta} f_{n,k}(\alpha,\beta)/f_{n,k}(\alpha,\beta)$$

seja mínima.

Decorre imediatamente de (8) que o problema é equivalente a determinar todas as derivadas logarítmicas explicitamente de todas as quantidades $1-x_{n,k}(\alpha,\beta)$, i.e, determinar $\dfrac{\partial \ln(1-x_{n,k}(\alpha,\beta))}{\partial\beta}$. Se procurarmos funções $f_n(\alpha,\beta)$ que dependem somente de n, mas não de k, então o problema *P1* pode ser reformulado:

P2. *Para todo inteiro $n \geq 2$ fixo, determinar a função $f_n(\alpha,\beta)$ positiva e suave para $\alpha,\beta > -1$, tal que para todo k, $1 \leq k \leq n$, os produtos*

$$t_{n,k}(\alpha,\beta) = f_n(\alpha,\beta)x_{n,k}(\alpha,\beta)$$

sejam funções crescentes de β e

$$\frac{\partial \ln f_n(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta} f_n(\alpha,\beta)/f_n(\alpha,\beta)$$

seja mínima.

Se estivermos interessados em uma função universal, o problema pode ser reescrito da seguinte forma:

P3. *Qual é a função $f(\alpha,\beta)$, positiva e suave para $\alpha,\beta > -1$, tal que, para todo $n \geq 2$ fixo, $1 \leq k \leq n$, os produtos $f(\alpha,\beta)x_{n,k}(\alpha,\beta)$ sejam funções crescentes de β e*

$$\frac{\partial \ln f(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta} f(\alpha,\beta)/f(\alpha,\beta)$$

seja mínima.

A noção "extrema" para os problemas enunciados para o caso dos poliômios de Jacobi é equivalente à minimização das derivadas logarítmicas $\dfrac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}$, $\dfrac{\partial \ln f_n(\alpha,\beta)}{\partial\beta}$ e $\dfrac{\partial \ln f(\alpha,\beta)}{\partial\beta}$, respectivamente. Obviamente essas exigências determinam uma função conhecida a menos de um fator constante.

Se encontramos a solução geral $f_{n,k}(\alpha,\beta)$ de *P1*, que é a mais difícil, então as soluções $f_n(\alpha,\beta)$ de *P2* e $f(\alpha,\beta)$ de *P3* podem ser consequentemente obtidas, para quaisquer $\alpha,\beta > -1$ fixos, através das fórmulas

$$\frac{\partial \ln f_n(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \max_{1\leq k\leq n} \frac{\partial \ln f_{n,k}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}.$$

e

$$\frac{\partial \ln f(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \sup_{n\geq 2} \frac{\partial \ln f_n(\alpha,\beta)}{\partial\beta}.$$

Portanto, para resolver esses problemas necessitamos de limites superiores para $-\partial \ln(1-x_{n,k}(\alpha,\beta))/\partial\beta$.

Portanto, reduzimos o problema a determinar uma função $f_n(\alpha,\beta)$ positiva e suave que força os produtos $t_{n,k}(\alpha,\beta) = f_n(\alpha,\beta)(1-x_{n,k}(\alpha,\beta))$, $k = 1,\ldots,n$ crescer com β, $-1 < \beta < \infty$. Assim, se exigimos que $f_n(\alpha,\beta)$ seja uma função suave com a propriedade de que $t_{n,k}(\alpha,\beta)$ cresce com β, então a melhor possível escolha de f_n é aquela para o qual sua derivada logarítmica com respeito a β é a menor possível.

Neste sentido, em [3], tem-se o segunte resultado:

Teorema (Dimitrov & FRR, 2007): *Para cada n natural e k, $k = 1,2,\ldots,n$, os produtos*

$$f_n(\alpha,\beta)(1-x_{n,k}(\alpha,\beta)),$$

onde

$$f_n(\alpha,\beta) = 2n^2 + 2n(\alpha+\beta+1) + (\alpha+1)(\beta+1),$$

são funções crescentes de β, para $\beta \in (-1, \infty)$.

Corolário: *Para cada n natural e k, $k = 1, 2, \ldots, n$, os produtos*

$$f_n(\alpha,\beta)(1 + x_{n,k}(\alpha,\beta)),$$

são funções crescentes de α, para $\alpha \in (-1, \infty)$.

De fato, para justificar a condição extremal de f_n neste teorema, observe que podemos reformular este resultado como o seguinte:

Teorema (formulação equivalente): *Para cada n natural e k, $k = 1, \ldots, n$, os produtos*

$$g_n(\alpha,\beta)\left(1 - x_{n,k}(\alpha,\beta)\right),$$

onde

$$g_n(\alpha,\beta) = \beta + n + \frac{\alpha+1}{2} + \frac{1-\alpha^2}{2(2n+\alpha+1)},$$

são funções crescentes de β em $(-1, \infty)$.

Foi empregamos o método desenvolvido em [4] que é baseado no critério de estabilidade clássico de Routh-Hurwitz para provar que a função $g_n(\alpha,\beta)$, é assintoticamente "extrema" com relação a n. O resultado é o seguinte:

Teorema (Dimitrov & FRR, 2007): *Seja n natural, $\alpha > -1$ e $h_n(\alpha,\beta)$, considerada como função de β, positiva e continuamente diferenciável para $\beta \in (-1, \infty)$. Se os produtos*

$$h_n(\alpha,\beta)(1 - x_{nk}(\alpha,\beta)), \ k = 1, \ldots, n,$$

são funções crescentes de β em $(-1, \infty)$, então

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \ln h_n(\alpha,\beta) > \frac{1}{(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Mais ainda, se $h_n(\alpha,\beta) = \beta + n + (\alpha+1)/2 + d_n(\alpha)$, então

$$d_n(\alpha) < \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2(n+\alpha+1)}.$$

O fato que a função "extrema" com a propriedade desejada deve possuir a menor possível derivada logarítmica e a desigualdade (1.3) implicam que h_n deve ser uma função linear de β. Isto justifica a escolha de $h_n(\alpha,\beta)$, conforme indicado na segunda parte deste último teorema. Uma comparação da forma explícita da função $g_n(\alpha,\beta)$ e a desigualdade (1.4) mostra que $g_n(\alpha,\beta)$ é assintoticamente extrema. Na verdade, obviamente $g_n(\alpha,\beta) - h_n(\alpha,\beta) < 0$ para todo n, α e β admissíveis, e essa diferença se comporta como $O(1/n)$, quando n vai para infinito desde que β é fixo.

Referências

[1] S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler, Inequalities and numerical bounds for the zeros of ultraspherical polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, 17 (1986) 1000-1007.

[2] D. K. Dimitrov, On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials, *J. Approx. Theory*, 85 (1996) 88-97.

[3] D. K. Dimitrov and F. R. Rafaeli, Monotonicity of zeros of Jacobi polynomials, *J. Approx. Theory*, 149 (2007) 15–29.

[4] D. K. Dimitrov and R. O. Rodrigues, On the behaviour of zeros of Jacobi polynomials, *J. Approx. Theory*, 116 (2002) 224–239.

[5] A. Elbert and P. D. Siafarikas, Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials, *J. Approx. Theory* 97 (1999) 31–39.

[6] E. K. Ifantis and P. D. Siafarikas, Differential inequalities on the greatest zero of Laguerre and ultraspherical polynomials, in: Actas del VI Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicaciones, Gijon, 1989, pp. 187–197.

[7] M. E. H. Ismail, Monotonicity of zeros of orthogonal polynomials, in: D. Stanton (Ed.), q-Series and Partitions, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 177–190.

[8] M. E. H. Ismail, and J. Letessier, Monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials, in: M. Alfaro, J. S. Dehesa, F. J. Marcellán, J. L. Rubio de Francia, and J. Vinuesa, (Eds.), Orthogonal Polynomials and Their Applications, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1329, Springer-Verlag, Berlin, 1988, pp. 329–330.

[9] A. Laforgia, A monotonic property for the zeros of ultraspherical polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83 (1981) 757–758.

[10] A. Laforgia, Monotonicity properties for the zeros of orthogonal polynomials and Bessel function, in: Polynomes Orthogonaux et Applications, Proccedings of the

Laguerre Symposium, Bar-de-Duk, Spain, 1984, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1171, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 267–277.

[11] E. M. Purcell, "Electricity and Magnetism", Berkeley Physics Cuorse, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1963.

[12] R. Spigler, On the monotonic variation of the zeros of ultraspherical polynomials with the parameter, *Canad. Math. Bull.* 27 (1984) 472–477.

[13] T. J. Stieltjes, Sur les quelques théorémes d'algébre, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 100 (1885) 439–440.

[14] T. J. Stieltjes, Sur les polynômes de Jacobi, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 100 (1885) 620–622.

[15] T. J. Stieltjes, Sur les racines de l'équation $X_n = 0$, *Acta Math.*, 9 (1886) 385–400.

[16] G. Szegő, "Orthogonal polynomials", 4th ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, Providence, RI, 1975.

[17] A. Markov, Sur les racines de certaines équations (second note), *Math. Ann.*, 27 (1886) 177–182.