# Transformadas Trigonométricas Discretas: Convoluções e Polinômios de Chebyshev

**Juliano B. Lima**, **Ricardo M. Campello de Souza**
Depto de Eletrônica e Sistemas, UFPE,
C.P. 7800, Recife, PE
E-mail: juliano_bandeira@ieee.org, ricardo@ufpe.br

## Resumo

Este artigo discute as relações entre os polinômios de Chebyshev e as propriedades de convolução das transformadas trigonométricas discretas. A abordagem utilizada baseia-se na associação de duas seqüências que se deseja convoluir a polinômios, os quais são, em seguida, expandidos na forma de Chebyshev. Mostra-se que, calculando a transformada discreta do cosseno ou do seno da versão expandida dos polinômios em questão e realizando o seu produto ponto-a-ponto, é possível obter o resultado da convolução linear entre as duas seqüências originais.

## 1 Introdução

As transformadas trigonométricas discretas (DTT), que incluem as transformadas do cosseno (DCT) e as do seno (DST), desempenham um importante papel em diversas aplicações. Há, por exemplo, técnicas de marca d'água digital em que se insere informação no domínio da DCT, como forma de prover mais robustez e segurança [1]. As DTTs também são aplicadas na solução de sistemas Toeplitz, em sistemas OFDM, em interpolação, etc [2], [3], [4].

A propriedade mais relevante da DCT é a de compactação de energia, que torna fundamental o seu uso em padrões de compressão como o JPEG e o MPEG. Nesse contexto, o crescente aumento de imagens, áudio e vídeo digitais armazenados em forma compactada sugere o desenvolvimento de técnicas que permitam processar informação no domínio da compressão [5],[6]. Isso significa que, para redimensionar os quadros de um vídeo por meio de uma convolução (filtragem), por exemplo, não seria necessário descompactá-lo.

Entretanto, diferentemente da convolução cíclica da transformada discreta de Fourier (DFT) [7], o produto ponto-a-ponto no domínio da DCT não corresponde à convolução no respectivo domínio do tempo. Nesse caso, é necessário usar a convolução simétrica, que requer que uma das seqüências (o filtro) apresente algum tipo de simetria. Além disso, a seqüência a ser processada deve ser simetricamente estendida de acordo com um critério específico que depende dos tipos de transformadas a serem calculadas [8]. O mesmo ocorre para a DST.

Neste trabalho, apresenta-se um método alternativo para a convolução no domínio das DTTs. Propõe-se associar as seqüências a serem convoluídas a polinômios, que são expandidos na forma de Chebyshev. Calculando a transformada trigonométrica de cada expansão de Chebyshev, multiplicando-as ponto-a-ponto e, em seguida, calculando a transformada inversa, obtém-se a expansão de Chebyshev da convolução linear entre as duas seqüências originais. Esse procedimento remove a necessidade de extensões simétricas sem custo computacional adicional significativo.

Este artigo está organizado como segue. Na Seção 2, revisa-se brevemente alguns conceitos sobre polinômios de Chebyshev. Na Seção 3, tais conceitos são usados na derivação de algoritmos para convolução nos domínios da DCT e da DST. Na Seção 4, um exemplo da teoria desenvolvida é apresentado e algumas aplicações são sugeridas. Finalmente, na Seção 5, as principais conclusões desse trabalho são apresentadas.

## 2 Polinômios de Chebyshev

Os polinômios de Chebyshev do primeiro tipo, $T_i(x)$, e do terceiro tipo, $V_i(x)$, são definidos como

$$T_i(x) := \cos(i \arccos x), \tag{1}$$

e

$$V_i(x) := \frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right]}{\sqrt{\frac{1+x}{2}}}, \tag{2}$$

para $i \in \mathbb{N}$ e $x \in [-1,1]$ [9]. A partir da Equação (1) e observando que $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$, obtém-se a relação de recorrência

$$T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x), \tag{3}$$

que fornece $T_i(x)$ para diferentes valores de $i$. De forma análoga, a partir da Equação (2) e observando que $V_0(x) = 1$ e $V_1(x) = 2x - 1$, obtém-se

$$V_{i+1}(x) = 2xV_i(x) - V_{i-1}(x),$$

que fornece $V_i(x)$ para diferentes valores de $i$.

A partir da Equação (1), mostra-se que, para todo $x$ real,

$$x^n = 2^{1-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}{}' \binom{n}{k} T_{n-2k}(x).$$

Na equação acima, $(\sum{}')$ indica que o $k$-ésimo termo no somatório é dividido por 2 para $n$ par e $k = n/2$ [9]. Pela última equação, conclui-se que todo polinômio real $p_n(x)$ de grau $\leq n$ pode ser escrito em termos de polinômios de Chebyshev do primeiro tipo. Tal procedimento é chamado expansão de Chebyshev, a qual é expressa como

$$p_n(x) = \frac{t_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} t_i T_i(x) \quad (t_i \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

Na última equação, $t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, são os coeficientes de Chebyshev de $p_n(x)$.

Como existe uma relação direta entre os polinômios de Chebyshev do primeiro e do terceiro tipo [9], também é possível escrever qualquer polinômio real em termos de polinômios de Chebyshev $V_i(x)$. Nesse caso, tem-se a expansão

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} v_i V_i(x) \quad (v_i \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Usando a relação

$$2T_iT_j = T_{i+j} + T_{|i-j|}, \quad (i, j \in \mathbb{N}), \tag{6}$$

pode-se derivar uma regra de multiplicação para polinômios na forma de Chebyshev. Isto é, dados os coeficientes de Chebyshev (do primeiro tipo) de $p_n(x)$ e $q_n(x)$, é possível computar os coeficientes de Chebyshev de $r_{2n}(x) := p_n(x)\, q_n(x)$. Essa operação, cujos detalhes são encontrados em [10], envolve $\mathcal{O}(n^2)$ multiplicações reais.

As relações entre os polinômios de Chebyshev e os vários tipos de DCTs podem ser usadas para reduzir a complexidade da regra de multiplicação mencionada acima. Além disso, como uma multiplicação polinomial pode ser vista como uma convolução discreta, é possível introduzir novos tipos de convoluções no domínio da DCT.

Também é possível relacionar os polinômios de Chebyshev às transformadas discretas do seno. Nesse caso, polinômios do segundo tipo, $U_i(x)$, e do quarto tipo, $W_i(x)$, são necessários. Tais polinômios são definidos como

$$U_i(x) := \frac{\sin((i+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \tag{7}$$

e

$$W_i(x) := \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right]}{\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, \tag{8}$$

para $i \in \mathbb{N}$ e $x \in [-1,1]$ [9]. As recorrências a partir das quais se obtém polinômios de Chebyshev do segundo e do quarto tipos têm forma semelhante às relacionadas aos polinômios do primeiro e do terceiro tipos [9].

Uma vez que as relações

$$2T_i(x) = U_i(x) - U_{i-2}(x)$$

e

$$2T_i(x) = W_i(x) - W_{i-1}(x)$$

são válidas, todo polinômio real pode também ser escrito em termos de polinômios de Chebyshev do segundo e do quarto tipo. Assim, como no caso da DCT, pode-se multiplicar polinômios no domínio da DST e desenvolver novas convoluções relacionadas a essas transformadas.

# 3 Convoluções das DTTs e Polinômios na Forma de Chebyshev

## 3.1 DCT-I e DCT-III

Nesta subseção, desenvolvem-se relações entre os polinômios de Chebyshev do primeiro tipo e as transformadas discretas do cosseno dos tipos I (DCT-I) e III (DCT-III). Com esse propósito, define-se a grade

$$G := \left\{ g_k := \cos\left[\frac{(k+l)\,\pi}{N}\right]\right\}. \tag{9}$$

Para a DCT-I, na expressão acima, faz-se $l = 0$ e $k = 0, \ldots, N$. Se $N \geq n+1$, tal que $n$ é o grau do polinômio $p_n(x)$, escrito como na Equaçao (4), calcula-se

$$p_n\left(g_k\right) = \frac{t_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} t_i \cos\left(\frac{ki\pi}{N}\right).$$

Na forma matricial, tem-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}_N^I \mathbf{t}, \tag{10}$$

com

$$\begin{gathered}\mathbf{p}{:=}(g_k)_{k=0}^{N}{\in}\mathbb{R}^{N+1},\\ \mathbf{t}{:=}(t_i)_{i=0}^{N}{\in}\mathbb{R}^{N+1} \quad (t_i{:=}0\ (n{+}1{\leq}i{\leq}N)),\\ \mathbf{C}_N^I{:=}\left(\beta_i\cos\left(\tfrac{ki\pi}{N}\right)\right)_{i,k=0}^{N}{\in}\mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)},\end{gathered}$$

com $\beta_0 = \beta_N := 1/2$ e $\beta_i := 1$, $i = 1, \ldots, N-1$. Aqui, $\mathbf{C}_N^I$ é a matriz de transformação da DCT-I.

Considerando a grade $G$, definida na Equação (9), com $l = 1/2$ e $k = 0, \ldots, N-1$, um resultado análogo é obtido. Nesse caso, tem-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}_N^{III} \mathbf{t}, \tag{11}$$

com

$$\begin{gathered}\mathbf{p}{:=}p_n(g_k)_{k=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{N},\\ \mathbf{t}{:=}(t_i)_{i=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{N} \quad (t_i{:=}0\ (n{+}1{\leq}i{\leq}N{-}1)),\\ \mathbf{C}_N^{III}{:=}\left(\beta_i\cos\left(\tfrac{(k+1/2)i\pi}{N}\right)\right)_{i,k=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{(N)\times(N)}.\end{gathered}$$

A matriz $\mathbf{C}_N^{III}$ é a matriz de transformação da DCT-III.

## 3.2 DCT-II e DCT-IV

Nesta subseção, desenvolvem-se relações entre os polinômios de Chebyshev do terceiro tipo e as transformadas do cosseno dos tipos II (DCT-II) e IV (DCT-IV). Para isso, considera-se a grade $G$ com $l = 0$ e $k = 0, \ldots, N-1$. Avaliando a Equação (5) nesta grade, tem-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}_N^{II} \mathbf{v},$$

com

$$\begin{gathered}\mathbf{p}{:=}p_n(g_k)_{k=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{N},\\ \mathbf{v}{:=}(v_i)_{i=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{N} \quad (v_i{:=}0\ (n{+}1{\leq}i{\leq}N{-}1)),\\ \mathbf{C}_N^{II}{:=}\left(\gamma_k\cos\left(\tfrac{k(i+1/2)\pi}{N}\right)\right)_{i,k=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{(N)\times(N)},\end{gathered}$$

com $\gamma_k = \sqrt{\frac{2}{1+\cos(k\pi/N)}}$ e $\mathbf{C}_N^{II}$ sendo a matriz de transformação da DCT-II.

Se a grade $G$ é usada, com $l = 1/2$ e $k = 0, \ldots, N-1$, obtém-se um resultado análogo. Nesse caso, tem-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}_N^{IV} \mathbf{v},$$

com

$$\begin{gathered}\mathbf{p}{:=}p_n(g_k)_{k=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{N},\\ \mathbf{v}{:=}(v_i)_{i=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{N} \quad (v_i{:=}0\ (n{+}1{\leq}i{\leq}N{-}1)),\\ \mathbf{C}_N^{IV}{:=}\left(\theta_k\cos\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi}{N}\right)\right)_{i,k=0}^{N-1}{\in}\mathbb{R}^{(N)\times(N)},\end{gathered}$$

com $\theta_k = \sqrt{\frac{2}{1+\cos((k+1/2)\pi/N)}}$ e $\mathbf{C}_N^{IV}$ sendo a matriz de transformação da DCT-IV.

## 3.3 Convoluções da DCT

As idéias desenvolvidas nas Subseções 3.1 e 3.2 podem ser aplicadas à multiplicação polinomial. Considerando os polinômios na forma de Chebyshev

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} a_i T_i(x)$$

e

$$q_m(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^{m} b_i T_i(x),$$

o polinômio $r_{n+m}(x) := p_n(x)\, q_m(x)$ é escrito como

$$r_{n+m}(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{i=1}^{n+m} c_i T_i(x).$$

O polinômio $r_{n+m}(x)$ é unicamente determinado por

$$r_{n+m}(g_k) = p_n(g_k)\, q_m(g_k),$$

para $N \geq n+m+1$. Usando a relação (10) ou (11), reescreve-se a última equação como

$$\mathbf{C}_N \mathbf{c} = (\mathbf{C}_N \mathbf{a}) \circ (\mathbf{C}_N \mathbf{b}). \tag{12}$$

O símbolo $\circ$ denota o produto ponto-a-ponto e $\mathbf{C}_N$ é a matriz de transformação da DCT-I ou da DCT-III. De forma análoga, se $p_n(x)$ e $q_m(x)$ forem escritos em termos de polinômios de Chebyshev do terceiro tipo, $\mathbf{C}_N$ deve ser a matriz de transformação da DCT-II ou da DCT-IV. Os vetores **a**, **b** e **c** são preenchidos com "zeros" de acordo com o valor de $N$ e a DCT a ser usada. Diferentemente da convolução simétrica, a Equação (12) não envolve seqüências (polinômios) simetricamente estendidas nem tipos diferentes de DCTs. Entretanto, expansões de Chebyshev das seqüências originais são requeridas.

A Equação (12) pode ser reescrita como

$$\mathbf{c} = \mathbf{C}_N^{-1}\left((\mathbf{C}_N \mathbf{a}) \circ (\mathbf{C}_N \mathbf{b})\right). \tag{13}$$

Acima, $\mathbf{C}_N^{-1}$ é a matriz de transformação inversa da DCT considerada [8], [10]. Assim, obtidas as expansões de Chebyshev de duas seqüências (respectivamente polinômios), pode-se convoluí-las (respectivamente multiplicá-las) no domínio da DCT e obter os coeficientes de Chebyshev resultantes, os quais podem ser convertidos na representação usual de uma seqüência (respectivamente forma monomial).

Se $N$ for uma potência de 2, é possível usar algoritmos rápidos para calcular a DCT de uma seqüência de comprimento $N$. Assim, o cálculo de **c** envolve $\mathcal{O}(N \log N)$ multiplicações reais e é, portanto, mais eficiente que o método derivado diretamente da Equação (6) [10].

## 3.4 DST-I e DST-III

Nesta subseção, relações entre os polinômios de Chebyshev do segundo tipo e a transformada discreta do seno dos tipos I (DST-I) e III (DST-III) são desenvolvidas. Avaliando a Equação (7) na grade $G$, com $l = 0$ e $k = 1, \ldots, N-1$, escreve-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}_N^I \mathbf{u},$$

com

$$\mathbf{p} := p_n(g_k)_{k=1}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N-1},$$
$$\mathbf{u} := (u_i)_{i=0}^{N-2} \in \mathbb{R}^{N-1} \quad (u_i := 0\ (n+1 \leq i \leq N-2)),$$
$$\mathbf{S}_N^I := \left(\alpha_k \sin\left(\tfrac{k(i+1)\pi}{N}\right)\right)_{i=0,k=1}^{N-2,N-1} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)},$$

com $\alpha_k = \frac{1}{\sin(k\pi/N)}$ e $\mathbf{S}_N^I$ sendo a matriz de transformação da DST-I.

Considerando a grade $G$, com $l = 1/2$ e $k = 0, \ldots, N-1$, um resultado análogo é obtido. Nesse caso, tem-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}_N^{III} \mathbf{u},$$

com

$$\mathbf{p} := p_n(g_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N,$$
$$\mathbf{u} := (u_i)_{i=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N \quad (u_i := 0\ (n+1 \leq i \leq N-1)),$$
$$\mathbf{S}_N^{III} := \left(\alpha_k \sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)(i+1)\pi}{N}\right)\right)_{i,k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

com $\alpha_k = \frac{1}{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi/N\right)}$ e $\mathbf{S}_N^{III}$ sendo a matriz de transformação da DST-III.

## 3.5 DST-II e DST-IV

Nesta subseção, relações entre os polinômios de Chebyshev do quarto tipo e a transformada discreta do seno dos tipos II (DST-II) e IV (DST-IV) são desenvolvidas. A grade $G$, com $l = 0$ e $k = 1, \ldots, N$, é usada. Avaliando a Equação (8) nessa grade, escreve-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}_N^{II} \mathbf{w},$$

com

$$\mathbf{p} := p_n(g_k)_{k=1}^{N} \in \mathbb{R}^N,$$
$$\mathbf{w} := (w_i)_{i=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N \quad (w_i := 0\ (n+1 \leq i \leq N-1)),$$
$$\mathbf{S}_N^{II} := \left(\phi_k \sin\left(\frac{k\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi}{N}\right)\right)_{i=0,k=1}^{N-1,N} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

com $\phi_k = \sqrt{\frac{2}{1-\cos(k\pi/N)}}$ e $\mathbf{S}_N^{II}$ sendo a matriz de transformação da DST-II.

Usando a grade $G$, com $l = 1/2$ e $k = 0, \ldots, N-1$, tem-se

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}_N^{IV} \mathbf{w},$$

com

$$\mathbf{p} := p_n(g_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N,$$
$$\mathbf{w} := (w_i)_{i=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N \quad (w_i := 0\ (n+1 \leq i \leq N-1)),$$
$$\mathbf{S}_N^{IV} := \left(\omega_k \sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi}{N}\right)\right)_{i,k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

com $\omega_k = \sqrt{\frac{2}{1-\cos((k+1/2)\pi/N)}}$ e $\mathbf{S}_N^{IV}$ sendo a matriz de transformação da DST-IV.

### 3.6 Convoluções da DST

Se os coeficientes de Chebyshev dos polinômios $p_n(x)$ e $q_m(x)$ são associados aos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente, os coeficientes de Chebyshev do polinômio $r_{n+m}(x) := p_n(x)\, q_m(x)$, os quais são associados ao vetor $\mathbf{c}$, podem ser obtidos a partir de

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}_N^{-1}\left((\mathbf{S}_N\mathbf{a}) \circ (\mathbf{S}_N\mathbf{b})\right).$$

Na equação acima, $\mathbf{S}_N$ denota a matriz de transformação de um tipo específico de DST, que é selecionado de acordo com o tipo de polinômio de Chebyshev envolvido. Assim, a multiplicação de polinômios na forma de Chebyshev também pode ser efetuada no domínio da DST. A complexidade aritmética desse procedimento é similar ao caso da DCT.

## 4 Exemplo e Aplicações

### 4.1 Exemplo

Com o objetivo de ilustrar a teoria desenvolvida nas seções anteriores, um exemplo de multiplicação de polinômios no domínio da DCT é apresentado. Deseja-se multiplicar os polinômios

$$p_2(x) = x^2 + 4$$

e

$$q_3(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 3.$$

O polinômio produto $r_5(x)$ possui grau 5. Se a DCT-III, que está associada a polinômios de Chebyshev do primeiro tipo, for usada, o comprimento $N$ precisa ser pelo menos 6. Assim, de acordo com a Equação (4), os coeficientes de Chebyshev de $p_2(x)$ e $q_3(x)$ são escritos respectivamente como

$$\mathbf{a} = \left[\begin{array}{cccccc} 9 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e

$$\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccccc} 7 & 3.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Usando a Equação (11), constrói-se a matriz (14). Aplicando a Equação (13), obtém-se

$$\mathbf{c} = \left[\begin{array}{cccccc} 31.75 & 16.75 & 4 & 3.125 & 0.125 & 0.125 \end{array}\right].$$

O vetor $\mathbf{c}$ fornece os coeficientes de Chebyshev do polinômio $r_5(x)$. Substituindo-os na Equação (4), expandindo o somatório usando os polinômios de Chebyshev $T_i(x)$, $0 \le i \le 5$, e agrupando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtém-se a forma monomial de $r_5(x)$,

$$r_5(x) = 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 8x + 12.$$

### 4.2 Aplicações

Conforme observado na introdução desse artigo, trabalhos com o propósito de processar dados no domínio da DTT têm sido desenvolvidos [5], [6]. Os esquemos propostos são baseados na convolução simétrica e noutras técnicas, as quais têm sido aplicadas, principalmente, ao redimensionamento de dados digitais pela filtragem. Essa operação desempenha um importante papel em sistemas de comunicação nos quais é necessário mudar a resolução de uma imagem ou de um vídeo, devido às restrições de largura de banda ou à conversão de padrões.

De acordo com a teoria desenvolvida, também é possível usar as convoluções da DCT relacionadas aos polinômios de Chebyshev para realizar operações de filtragem no domínio da transformada. Nesse caso, alguns detalhes precisam ser considerados. Em primeiro lugar, se o dado está associado a uma matriz (ima-gem ou vídeo), uma extensão bidimensional para as convoluções apresentadas é requerida. Além disso, um bloco com a função de expandir o dado na base de Chebyshev precisa ser conectado antes do bloco que calcula a DCT em um codificador; de forma similar, um bloco com a função de receber o dado na forma de Chebyshev e convertê-lo à forma monomial seria conectado depois do bloco que calcula a DCT inversa no respectivo decodificador.

Uma expansão de Chebyshev do dado original é independente da propriedade de compactação de energia da DCT e, sob esse ponto de vista, a eficiência da compressão não é afetada. Desse modo, a complexidade aritmética da referida expansão, que também é conhecida, desempenha um importante papel apenas em cenários em que uma compactação (ou descompactação) rápida é requerida.

$$C_{III}^{6} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.9659 & 0.8660 & 0.7071 & 0.5000 & 0.2588 \\ 0.5000 & 0.7071 & 0.0000 & -0.7071 & -1.0000 & -0.7071 \\ 0.5000 & 0.2588 & -0.8660 & -0.7071 & 0.5000 & 0.9659 \\ 0.5000 & -0.2588 & -0.8660 & 0.7071 & 0.5000 & -0.9659 \\ 0.5000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.7071 & -1.0000 & 0.7071 \\ 0.5000 & -0.9659 & 0.8660 & -0.7071 & 0.5000 & -0.2588 \end{bmatrix} \tag{14}$$

## 5 Conclusões

Nesse artigo, foi discutida a associação entre convoluções das transformadas trigonométricas discretas e polinômios na forma de Chebyshev. Os quatro principais tipos de DCTs foram relacionados aos polinômios de Chebyshev do primeiro tipo e do terceiro tipo; os quatro principais tipos de DSTs foram relacionados aos polinômios de Chebyshev do segundo tipo e do quarto tipo. Algoritmos rápidos para multiplicação de polinômios na forma de Chebyshev foram derivados a partir dessas relações. Interpretando sinais discretos como polinômios na forma monomial, o processo descrito pode ser usado para calcular a convolução de duas seqüências no domínio da DCT ou da DST. Um exemplo foi apresentado e aplicações para a teoria desenvolvida foram sugeridas.

Os conceitos apresentados neste artigo motivam futuras investigações. Nesse sentido, cenários práticos para aplicação da teoria desenvolvida podem ser estudados com mais detalhes, por exemplo, nos campos de processamento de imagem e de áudio. Outras transformadas discretas que não possuem uma propriedade de convolução direta, como a transformada discreta de Hartley, podem ser investigadas. Neste caso, pode-se procurar uma base polinomial (não necessariamente a de Chebyshev) que defina grades que permitam simplificar a propriedade mencionada. Assim, relações entre outras famílias específicas de polinômios e transformadas discretas podem ser estudadas.

## Referências


[1] M. A. Suhail and M. S. Obaidat, "Digital watermarking-based DCT and JPEG model," *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, vol. 52, no. 5, pp. 1640–1647, October 2003.

[2] G. Codevico, G. Heinig, and M. Van Barel, "Fast polynomial multiplication and convolutions related to the discrete cosine transform," *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol. 12, no. 8, pp. 699–713, October 2005.

[3] R. Merched, "On OFDM and single-carrier frequency-domain systems based on trigonometric transforms," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 13, no. 8, pp. 473–476, August 2006.

[4] A. Z. and M. G. Bellanger, "Fast DCT-based spatial domain interpolation of blocks in images," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 9, no. 4, pp. 729–732, April 2000.

[5] H. Park, Y. Park, and S. Oh, "L/M-fold image resizing in block-DCT domain using symmetric convolution," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 12, no. 9, pp. 1016–1034, September 2003.

[6] H. Park and Y. Park, "Design and analysis of an image resizing filter in the block-dct domain," *IEEE Trans. Circ. Syst. for Video Technology*, vol. 14, no. 2, pp. 1016–1034, February 2004.

[7] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. Prentice Hall, 1999.

[8] S. A. Martucci, "Symmetric convolution and the discrete sine and cosine transforms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 5, pp. 1038–1051, May 1994.

[9] J. Mason and D. Handscomb, *Chebyshev Polynomials.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003.

[10] G. Baszenski and M. Tasche, "Fast polynomial multiplication and convolutions related to the discrete cosine transform," *Linear Algebra Appl.*, vol. 252, no. 1-3, pp. 1–25, February 1997.