# Problema de Routh-Hurwitz.

**Dimitar Kolev Dimitrov**
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: dimitrov@ibilce.unesp.br

**Fábio Rodrigues Lucas**
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica IMECC, UNICAMP,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: ra066597@ime.unicamp.br.

**Resumo:** *Na investigação da estabilidade de sistemas mecânicos e outros problemas de mecânica é de muita importáncia encontrar condições para que uma equação algébrica com coeficientes reais possua somente raízes com a parte real negativa. Em 1877 E.J. Routh forneceu uma solução algorítima para este problema, a qual não permaneceu amplamente conhecida. Em 1895 A. Hurwitz obteve condições sobre a qual um polinômio tem somente zeros com partes reais negativas atravéz de determinantes.*

*Neste trabalho vamos apresentar algumas versões do Teorema de Routh-Hurwitz.*

**Introdução:** Um polinômio em que todos os seus zeros estão localizandos no semi-plano esquerdo com relação ao eixo imaginário, é chamado polinômio de Hurwitz.

Seja

$$f(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x^3 + \ldots + a_0x^n, \quad (1)$$

onde $a_0 > 0$, o polinômio com coeficientes complexos.

**Lema1:** Se a função (1) possui todas suas raízes do lado esquerdo do eixo imaginário, então todos seus coeficientes são positivos.

**Demonstração:** Seja $-\alpha_\mu, 1 \leq \mu \leq s$, as raízes reais da função (1), e seja
$-\beta_\nu \pm i\gamma_\nu, 1 \leq \nu \leq r$, suas raízes imaginárias.

O lado direito de (1) é o produto de $a_0$ com $x + \alpha_\mu, 1 \leq \mu \leq s$ e $x^2 + 2\beta_\nu x + \beta_\nu^2 + \gamma_\nu^2$ com $1 \leq \nu \leq r$.

Como todos esses termos tem coeficientes positivos e $a_0 > 0$, obtemos um polinômio com somente coeficientes positivos.

**Teorema1:(Hermite-Biehler)** Seja

$$f(z) = U(z) + iV(z),$$

um polinômio de grau $n$ e coeficientes complexos, $U(z)$ e $V(z)$ polinômios de coeficientes reais. Os zeros de $f(z)$ estão em um dos semiplanos em relação ao eixo real se, e somente se, os zeros de $U(z)$ e de $V(z)$ são reais e entrelaçam.

**Demonstração.**

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zeros de $f(z)$, suponhamos que esses zeros estejam acima do eixo real. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra $f(z) = a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n)$. Chamamos

$$\begin{aligned} a_0 &= r(\cos\gamma + i\sin\gamma) \\ z - \alpha_k &= \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k),\ k = 1, 2, \ldots, n \\ f(z) &= R(\cos\Phi + i\sin\Phi) \end{aligned}$$

Quando $z$ percorre a reta real de $-\infty$ a $+\infty$ o argumento $\theta_k,\ k = 1, \ldots, n$, varia de 0 a $\pi$. Para cada valor de $z$ o argumento de $f(z)$ é $\Phi = \gamma + \theta_1 + \cdot + \theta_n$, logo $\Phi$ cresce estritamente e continuamente de $\gamma$ a $\gamma + n\pi$ quando $z$ percorre a reta real. Se $a_0$ é real, ou seja $\gamma = 0$ então $\partial(U) = n$ e $\partial(V) < n$. E se $\Re(a_0) = 0$, i.e., $\gamma = (2c+1)\pi/2$, com c inteiro, então $\partial(V) = n$ e $\partial(U) < n$. Demais casos de $a_0$ $\partial(U) = \partial(V) = n$.

Observe que, $U(z) = R\cos\Phi$ e $V(z) = R\sin\Phi$, com $R \neq 0$, pois 0 não pode ser raiz de $f(z)$. Quando $z$ percorre a reta real $\Phi \in (\gamma, \gamma + n\pi)$ e então $\sin\Phi$ zera $n$ vezes se

$\gamma \neq 0$ e $n-1$ vezes se $\gamma = 0$ e $\cos\Phi$ zera $n$ vezes se $\gamma \neq (2c+1)\pi/2$ e $n-1$ vezes se $\gamma = (2c+1)\pi/2$. Portanto todos os zeros de $U(z)$ e $V(z)$ são reais e entrelaçados.

Para provarmos a recíproca chamaremos os zeros de $V(x)$ de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, e assim $V(x) = a(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_n)$, com a real.

Suponhamos que $U(x)$ tenha um zero a mais do que $V(x)$ e usando a fórmula de interpolação de Lagrange temos que

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{U(\omega_k)V(x)}{V'(\omega_k)(x-\omega_k)} \tag{2}$$

Se $f(\xi + i\eta) = 0$, claramente $V(\xi + i\eta) \neq 0$ pois os zeros de $U(z)$ e $V(z)$ se entrelaçam e daí

$$0 = \frac{U(\xi + i\eta)}{V(\xi + i\eta)} + i. \tag{3}$$

Das equações 2 e 3 temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{U(\omega_k)}{V'(\omega_k)(\xi + i\eta - \omega_k)} + i \\ 0 &= i + \sum_{k=1}^{n} \frac{U(\omega_k)(\xi - \omega_k - \eta i)}{V'(\omega_k)((\eta - \omega_k)^2 + \eta^2)} \end{aligned}$$

Olhando para a parte imaginária da equação acima temos que

$$0 = 1 - \eta \sum_{k=1}^{n} \frac{U(\omega_k)}{V'(\omega_k)((\eta - \omega_k)^2 + \eta^2)} \tag{4}$$

Por outro lado sabemos que, pelo fato dos zeros se entrelaçarem

$$\begin{aligned} U(\omega_k).U(\omega_{k+1}) &< 0 \\ V'(\omega_k).V'(\omega_{k+1}) &< 0, \quad k = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{U(\omega_k)}{V'(\omega_k)}$ têm o mesmo sinal para todo $k$, $k = 1, \ldots, n$. Por 4 $\eta$ terá o mesmo sinal, ou seja, todos os zeros de $f(z)$ estão no mesmo semi-plano com relação ao eixo real.

Caso $U(z)$ não tenha menos zeros do que $V(z)$ basta tomarmos mais um ou dois pontos $\omega$ e $\overline{\omega}$ para interpolação que satisfaçam

$$\frac{U(\omega)}{V'(\omega)} = \frac{U(\overline{\omega})}{V'(\overline{\omega})} = \frac{U(\omega_k)}{V'(\omega_k)},$$

o que é sempre possível próximo de $\omega_n$.

**Lema 2** Um polinômio de coeficientes reais $g(z) = h_1(z^2) + zh_2(z^2)$ possui todos os zeros no semi-plano esquerdo com relação ao eixo imaginário se, e somente se, os zeros de $h_1(z)$ e de $h_2(z)$ são reais negativos e entrelaçam.

**Demonstração** Se os zeros de $g(z)$ estão à esquerda do eixo imaginário então os zeros de $p(z) = g(iz)$ estão abaixo do eixo real. Como

$$g(iz) = h_1(-z^2) + izh_2(-z^2)$$

então sabemos que os zeros de $h_1(-z^2)$ e $zh_2(-z^2)$ são reais e entrelaçam. Conseqüentemente, os zeros de $h_1(z)$ e $h_2(z)$ são reais negativos e continuam entrelaçados.

Reciprocamente, se os zeros de $h_1(z)$ e $h_2(z)$ são reais negativos e entrelaçam, os zeros de $h_1(-z^2)$ e $zh_2(-z^2)$ se entrelaçam e daí os zeros de $g(iz)$ estão em um dos semi-planos com relação ao eixo real e portanto os zeros de $g(z)$ estão em um dos semi-planos com relação ao eixo imaginário.

Como os zeros de $h_1(z)$ e $h_2(z)$ são reais negativos, então pela regra de Descartes temos que seus coeficientes são positivos e daí os coeficientes de $h_1(z) + zh_2(z) = g(z)$ também são positivos. Supondo que os zeros de $g(z)$ estejam no semi-plano direito então $g(-z)$ têm todos seus zeros no semi-plano esquerdo mas seus coeficientes têm sinais alternados, o que contradiz o lema anterior. Portanto os zeros de $g(z)$ estão no semi-plano esquerdo em relação ao eixo imaginário.

**Problema de Routh Hurwitz.**

Agora vamos apresentar algumas formas do clássico Teorema de Hurwitz sobre estabilidade de polinômios.

(Teorema de Hurwitz) Uma necessária e suficiente condição para que $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_0 > 0$, com coeficientes reais, possua todas suas raízes com partes reais negativas, é que os determinantes

$$\Delta_\lambda^n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & & a_0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2\lambda-1} & a_{2\lambda-2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_\lambda \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n$$

sejam positivos, onde, $\lambda > n$ tomamos $a_\lambda = 0$.

Antes de ser demonstrado o Teorema acima, vamos considerar alguns resultados preliminares que serão utilizados na demonstração do Teorema.

Seja

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n,\ \ a_n \neq 0$$

o polinômio com coeficientes complexos, e seja $f^*(x)$ o polinômio

$$f^*(x) = \overline{f}(-x) = \overline{a}_0-\overline{a}_1x+\overline{a}_2x^2-\ldots+(-1)^n\overline{a}_nx^n,$$

obtido de $f(x)$ por substituir $-x$ no lugar de $x$ e trocar seus coeficientes pelos seus conjugados. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são os zeros de $f(x)$, então

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

e, portanto

$$f^*(x) = \overline{a}_n(-1)^n(x+\overline{\alpha}_1)(x+\overline{\alpha}_2)\ldots(x+\overline{\alpha}_n).$$

Seja $f(x)$ um polinômio de Hurwitz, ou seja as partes reais $\mu_k$ de seus zeros $\alpha_k = \mu_k + i\nu_k, 1 \leq k \leq n$ são negativos.

Seja $\Re(x)$ a parte real do número complexo $x$.Então,

$$0 \leq\mid f(x) \mid<\mid f^*(x) \mid,\ \ \mathrm{Re}(x) < 0,$$

$$0 \leq\mid f^*(x) \mid<\mid f(x) \mid,\ \ \mathrm{Re}(x) > 0,$$

$$0 <\mid f(x) \mid<\mid f^*(x) \mid,\ \ \mathrm{Re}(x) = 0.$$

Demonstracão:

Como $f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, é suficiente demonstrar as desigualdades acima apenas para

$$\varphi(x) = x - \alpha_k = x - \mu_k - i\nu_k,$$

$$\varphi^*(x) = -x - \overline{\alpha}_k = -x - \mu_k + i\nu_k.$$

Se denotarmos $x = u + it$, temos

$$\mid \varphi^*(x) \mid^2 - \mid \varphi(x) \mid^2 = 4u\mu_k.$$

Como $\mu_k < 0, k = 1, \ldots, n$, pois $f(x)$ é polinômio de Hurwitz, temos os seguintes casos.

$$\text{Se}\ \ u = \mathrm{Re}(x) < 0,\ \text{então}\ 4u\mu_k > 0$$

e portando

$$0 \leq\mid f(x) \mid<\mid f^*(x) \mid.$$

Analogamente, quando

$u = \mathrm{Re}(x) > 0$, temos $4u\mu_k < 0$ que implica em

$$0 \leq\mid f^*(x) \mid<\mid f(x) \mid$$

e, finalmente, para

$u = \mathrm{Re}(x) = 0$ obviamente $4u\mu_k = 0$ e daí

$$0 \leq\mid f^*(x) \mid=\mid f(x) \mid.$$

**Proposição** Sejam $\alpha$ e $\beta$ números complexos arbitrários tais que $\mid \alpha \mid>\mid \beta \mid$. Uma condicão necessária e suficiente para que o polinômio $f(x)$ seja de Hurwitz é que $g(x) = \alpha f(x) - \beta f^*(x)$ seja também um polinômio de Hurwitz.

Demonstração:

Se $f(x)$ tem somente zeros com parte real negativa ,então, para todo $x$, tal que $\Re(x) \geq 0$, temos pelo resultado anterior, que $\mid f(x) \mid\geq\mid f^*(x) \mid$.

Como, por hipótese, $\mid \alpha \mid>\mid \beta \mid$, então $\mid \alpha f(x) \mid\geq\mid \beta f^*(x) \mid$. Esta ultima desigualdade, juntamente com a desigualdade do triangulo, mostra que $g(x) \neq 0$ para $\Re(x) \geq 0$.

Por outro lado, suponha que $g(x)$ tenha somente zeros com partes reais negativas. Como $g(x) = \alpha f(x) - \beta f^*(x)$, temos que $g^*(x) = \overline{\alpha} f^*(x) - \overline{\beta} f(x)$. Multiplicando $g(x)$ por $\overline{\alpha}$, $g^*(x)$ por $\beta$ e somando essas duas equacões, obtemos

$$f(x) = \frac{\overline{\alpha}}{\mid \alpha \mid^2 - \mid \beta \mid^2} g(x) + \frac{\beta}{\mid \alpha \mid^2 - \mid \beta \mid^2} g^*(x).$$

Como $\mid \alpha \mid>\mid \beta \mid$, temos que

$$\frac{\mid \alpha \mid}{\mid \alpha \mid^2 - \mid \beta \mid^2} > \frac{\beta}{\mid \alpha \mid^2 - \mid \beta \mid^2}.$$

Segue da primeira parte deste Teorema que $f(x)$ possui somente zeros com partes reais negativas.

**Proposição 2** O polinômio $f(x)$ é de Hurwitz se, e somente se, o polinômio

$$F(x,\zeta) = \frac{f^*(\zeta)f(x) - f(\zeta)f^*(x)}{x - \zeta}$$

é de Hurwitz e $\mid f(\zeta) \mid<\mid f^*(\zeta) \mid$ onde $\zeta$ é um número arbitrário com parte real negativa. Além disso $F(x,\zeta)$ é um polinômio de grau $(n-1)$ na variável $\zeta$.

Demonstração:

Seja $\zeta$ um número complexo arbitrário com parte real negativa. Se $f(x)$ é um polinômio de Hurwitz, então, de (4) temos que

$$| f(\zeta) |<| f^*(\zeta) | \text{ (5).}$$

Pelo Teorema anterior, a equação

$$f^*(\zeta)f(x) - f(\zeta)f^*(x) = 0 \quad (6)$$

com respeito a variável $x$, tem somente raízes com partes reais negativas. Suponha que (6) possui somente raízes do lado esquerdo do eixo-imaginário e que (5) é satisfeito para um número $\zeta$ com parte real negativa. Então, o polinômio $f(x)$ é de Hurwitz. Seja $G(\zeta) = f^*(\zeta)f(x) - f(\zeta)f^*(x)$, desenvolvendo $G(\zeta)$ em série de Taylor no ponto $\zeta = x$ temos

$$G(\zeta) = G(x)+G'(x)(x-\zeta)+\ldots+\frac{G^n(x)}{n!}(x-\zeta)^n.$$

Como $G(x) = 0$ podemos dividir a igualdade acima por $(x - \zeta)$ obtendo

$$F(x,\zeta) = G'(x)+\frac{G^2(x)}{2!}(x-\zeta)\ldots+\frac{G^n(x)}{n!}(x-\zeta)^{n-1},$$

que é um polinômio de grau $(n-1)$ na variável $\zeta$.

Este lema reduz o problema de determinar se um polinômio de grau $n$ é um polinômio de Hurwitz, para o mesmo problema com um polinômio de grau $(n - 1)$ e uma desigualdade. Seja $F(x,\zeta) = F_0(x) + \zeta F_1(x) + \ldots + \zeta^{n-1}F_{n-1}(x)$. Agora, comparando o termo livre e o coeficiente de $\zeta$ em ambos os lados da igualdade

$$(x - \zeta)F(x,\zeta) = f^*(\zeta)f(x) - f^*(x)f(\zeta),$$

obtemos

$$\overline{a}_0 f(x) - a_0 f^*(x) = xF_0(x)$$

e

$$-\overline{a}_1 f(x) - a_1 f^*(x) = -F_0(x) + xF_1(x). \quad (7)$$

Por álgebra elementar, temos

$$x^2[F_0(x)+\zeta F_1(x)] = f(x)\varphi(x)-\psi(x)f^*(x), \quad (8)$$

onde

$$\varphi(x) = \overline{a}_0 x - \overline{a}_1\zeta x + \overline{a}_0\zeta x,$$

$$\psi(x) = a_0 x + a_1\zeta x + a_0\zeta x. \quad (9)$$

Assim, de (7) temos que os polinômios $F_0(x)$ e $F_1(x)$ sã de grau $(n - 1)$.

Utilizando $F_0(x)$ e $F_1(x)$ temos o seguinte Teorema.

Seja $\zeta$ um número complexo arbitrário com parte real negativa. O polinômio $f(x)$ é de Hurwitz se, e somente se,

$$a_0 \neq 0, \quad \Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0 \quad (10)$$

e o polinômio de grau $(n - 1)$

$$H(x) = F_0(x) + \zeta F_1(x)$$

é um polinômio de Hurwitz.

Demonstracão.

Seja $f(x)$ polinômio de Hurwitz. Claramente $a_0 \neq 0$, pois caso contrário, zero seria uma raíz de $f(x)$ o que contradiz o fato de $f(x)$ ser polinômio de Hurwitz.

Como os zeros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de $f(x)$ estão localizados do lado esquerdo do eixo imaginário, temos que seus valores inversos $\frac{1}{\alpha_k}$, $1 \leq k \leq n$ estão, localizados no mesmo semi-plano.Como,

$$\frac{-a_1}{a_0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}$$

relacão de Girard entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes, segue que

$$\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \Re\left(\frac{1}{\alpha_k}\right) > 0.$$

Temos de (5) e (4) que se $\Re(\zeta) < 0$ e $\Re(x) \geq 0$ implica que $F(x,\zeta) \neq 0$. Se denotarmos $\zeta = 1/\eta$, segue que $\Re(\eta) < 0$, logo para $\mathrm{Re}(x) \geq 0$ temos

$$\Theta(x,\eta) = F_0(x)\eta^{n-1}+F_1(x)\eta^{n-2}+\ldots+F_{n-1}(x) \neq 0.$$

Isto mostra que para cada $x$ com $\Re(x) \geq 0$ o polinômio $\Theta(x,\eta)$ da variável $\eta$ tem somente zeros $\eta_k$ para os quais

$$\Re(\eta_k) \geq 0.$$

Vamos primeiramente supor que $F_0(x) \neq 0$.

Como $\frac{-F_1(x)}{F_0(x)}$ é igual a soma dos zeros de $\Theta(x,\eta)$, temos que

$$\Re\left(\frac{-F_1(x)}{F_0(x)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Re(\eta_k) \geq 0.$$

Se $\Re(\zeta) < 0$, temos

$$\Re\left(\frac{H}{\zeta F_0}\right) = \Re\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{F_1}{F_0}\right) = \Re\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \Re\left(\frac{F_1}{F_0}\right) < 0$$

e, portanto, o polinômio $H(x)$ tem somente zeros com partes reais negativas, ou seja, $H(x)$ é polinômio de Hurwitz. Agora, se $F_0(x) = 0$, então para termos $H(x) = 0$, a igualdade $F_1(x) = 0$ deve ser satisfeita também. Mas, neste caso, de (7),

$$\overline{a}_0 f(x) - a_0 f^*(x) = 0, \quad \overline{a}_1 f(x) + a_1 f^*(x) = 0$$

e, como $f(x) \neq 0$ para $\Re(x) \geq 0$, pois $f(x)$ é de Hurwitz, estas igualdades implicam que

$$0 = \overline{a}_0 a_1 + a_0 \overline{a}_1 = 2\mathrm{Re}(a_0 a_1) = \mathrm{Re}\left(\frac{a_0}{a_1}\right)$$

, o que contradiz (10). Assim, temos demonstrado a primeira parte do Teorema.

Agora, seja $a_0 \neq 0$, $\mathrm{Re}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$ e $H(x)$ polinômio de Hurwitz. Vamos provar que $f(x)$ é polinômio de Hurwitz, também.

De (8) obtemos

$$x^2 H(x) = f(x)\varphi(x) - f^*(x)\psi(x) \quad (11).$$

Logo,

$$x^2 H^*(x) = f^*(x)\varphi^*(x) - f(x)\psi^*(x), \quad (12)$$

onde $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são dados como em (9).

De (11) e (12) temos

$$(\varphi^*\varphi - \psi^*\psi)f = x^2(H\varphi^* + H^*\varphi).$$

Se $x$ é um zero de $f(x)$, então, da ultima igualdade segue que

$$H(x)\varphi^*(x) + H^*(x)\varphi(x) = 0, \quad (13)$$

pois, como $a_0 \neq 0$, temos que $x \neq 0$.

Vamos supor que $\Re(x) > 0$. Como $H(x)$ é polinômio de Hurwitz, segue de (4) que

$$\mid H(x) \mid \geq \mid H^*(x) \mid . \quad (14)$$

Vamos mostrar agora que

$$\mid \varphi^*(x) \mid > \mid \psi(x) \mid . \quad (15)$$

A desigualdade (15) é equivalente a mostrar que

$$\mid -a_0 x + a_1\zeta x + a_0\overline{\zeta} \mid > \mid \overline{a}_0 x + a_1 \zeta x + a_0 \zeta \mid$$

para $\Re(x) \geq 0$ e $\Re(\zeta) < 0$. Dividindo ambos os lados desta desigualdade por $\mid a_0 x\zeta \mid = \mid a_0 x \overline{\zeta} \mid$ temos

$$\mid \frac{-1}{\overline{\zeta}} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x} \mid > \mid \frac{1}{\zeta} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x} \mid .$$

Denotando $t = \dfrac{-a_1}{a_0} - \dfrac{1}{x}$, $\eta = \dfrac{1}{\zeta}$ e substituindo na desigualdade acima temos

$$\mid t + \overline{\eta} \mid > \mid t - \eta \mid .$$

Como

$$\Re(t) = -\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \Re\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \text{ e } \Re(\eta) = \Re\left(\frac{1}{\zeta}\right) < 0,$$

a ultima desigualdade segue como na demonstracão de (4).

Então, de (14) e (15) segue que $\mid H\varphi^* \mid > \mid H^*\psi \mid$ para $\Re(x) \geq 0$, isto é, $H(x)\varphi^*(x) + H^*(x)\psi(x)$ é diferente de zero para todo $x$ com $\Re(x) \geq 0$. Logo, $f(x)$ é polinômio de Hurwitz.

Para completarmos a demonstracão, falta mostrar que $H(x)$ é um polinômio de grau $(n-1)$.

Suponha que o grau de $H(x)$ seja menor que $(n-1)$. Assim,

$$a_n(\overline{a}_0 - \overline{a}_1\zeta) = (-1)^n \overline{a}_n (a_0 + a_1\zeta)$$

que é o coeficiente do termo de maior grau de $H(x)$.

Consequentemente,

$$\mid \overline{a}_0 - \overline{a}_1\zeta \mid = \mid a_0 + a_1\zeta \mid$$

ou

$$\mid \frac{1}{\zeta} - \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_0} \mid = \mid \frac{1}{\zeta} + \frac{a_1}{a_0} \mid .$$

Como $\Re\left(\frac{1}{\zeta}\right) < 0$ e $\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$ está ultima igualdade contradiz (4).

Agora vamos dar a demonstração do Teorema de Hurwitz, para tal demonstração além de utilizarmos os resultados acima, vamos precisar do Teorema de Laplace Generalizado para cálculo de determinantes.

**Demonstração do Teorema de Hurwitz:** O polinômio $f(x)$ pode ser escrito na forma

$$f(x) = g(x^2) + xh(x^2), \quad (16)$$

onde $h(x)$ e $g(x)$ são os polinômios

$$h(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \ldots \text{ e } g(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \ldots .$$

De (16) segue que $f^*(x) = g(x^2) - xh(x^2)$, pois os coeficientes de $f(x)$ são reais.

O Teorema é evidente para equacões de grau um pois, por hipótese $a_0 > 0$ e então $a_1 > 0$ ou seja, $\Delta_1^1 > 0$.

Provaremos a afirmacão do Teorema por argumento indutivo utilizando os dois ultimos Teoremas.

No nosso caso o polinômio $H(x) = F_0(x) + \zeta F_1(x)$ é dado por

$$\frac{1}{2}H(x) = a_0\left(1 + \frac{\zeta}{x}\right)h(x^2) - a_1\frac{\zeta}{x}g(x^2),$$

pois, de (7),

$$F_0(x) = 2a_0h(x^2) \text{ e } F_1(x) = \frac{2a_0h(x^2) - 2a_1g(x^2)}{x}.$$

Aqui é conveniente supor que $\zeta$ é um número real negativo. Vamos tomar $\zeta = -a_0$. Então,

$$\frac{1}{2a_0}H(x) = a_0\left(1 - \frac{a_0}{x}\right)h(x^2) + \frac{a_1}{x}g(x^2)$$

$$= a_1 + (a_1a_2 - a_0a_3)x + a_3x^2 + (a_1a_4 - a_0a_5)x^3 + \ldots$$

Agora, de acordo com o Teorema anterior, temos que o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_0 > 0$ com coeficientes reais é um polinômio de Hurwitz se, somente se, o polinômio de grau $(n-1)$

$$f_1(x) = a_0\left(1 - \frac{a_0}{x}\right)h(x^2) + \frac{a_1}{x}g(x^2)$$

é um polinômio de Hurwitz e $a_1 > 0$.

Vamos supor que o Teorema de Hurwitz é estabelecido para todo polinômio de grau $(n-1)$.

Seja $\Delta_\lambda^{n-1}$ o correspondente determinante para o polinômio $f_1(x)$, ou seja

$$\Delta_\lambda^{n-1} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - a_0a_3 & a_1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1a_4 - a_0a_5 & a_3 & a_1a_2 - a_0a_3 & a_1 & \ldots \\ a_1a_6 - a_0a_7 & a_5 & a_1a_4 - a_0a_5 & a_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Agora vamos multiplicar a segunda coluna de matriz acima por $a_0$ e somar com a terceira coluna, em seguida multiplicamos a quarta coluna por $a_0$ e somar o resultado com a quinta culuna, repetindo esse processo até o final da matriz temos

e

$$\frac{\Delta_\lambda^{n-1}}{a_1^p} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - a_0a_3 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_1a_4 - a_0a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_1a_6 - a_0a_7 & a_5 & a_4 & a_3 & a_0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n-1,$$

onde $p = [\frac{\lambda+1}{2}] - 1$.

Agora vamos utilizar o Teorema de Laplace para calcular $\Delta_\lambda^n$ mantendo as duas primeiras colunas fixas e observar que ao calcular $\Delta_\lambda^{n-1}$ pela primeira coluna temos a seguinte igualdade,

$$\Delta_\lambda^{n-1} = a_1^p\Delta_\lambda^n.$$

Como por Hipótese $\Delta_\lambda^{n-1} > 0, \lambda = 1, \ldots, n-1$ e $a_1 > 0$ segue que

$$\Delta_\lambda^n > 0, \quad \lambda = 1, \ldots, n.$$

Uma segunda forma do Teorema de Hurwitz é a seguinte.

O polinômio $f(x) = \sum_{j=0}^n a_jx^j$ com $a_j > 0$ é estável se, e somente se, sua matriz de Hurwitz infinita $H(f)$ é um produto da forma

$$H(f) = J(c_1)\ldots J(c_n)H(b),$$

com todos os parametros $c_j$, $j = 1\ldots, n$ positivos, e $b$ um polinômio positivo de grau 0. Onde

$$H(f) = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots \\ 0 & 0 & a_1 & 0_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

e

$$J(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & c & 1 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

A idéia da demonstração é provar por indução sobre $n$ que um polinômio $f$ de grau $n$, $f(0) > 0$, é estável se, e somente se, os primeiros $n+1$ menores principais $\Delta_j(f), j =$

$1,\ldots,n+1$ de $H(f)$ são positivos e a fatorização de $H(f)$ segue como no enunciado do Teorema.

Para completar este trabalho vamos enunciar uma terceira versão do Teorema de Hurwitz.

Seja $f$ um polinômio de Hurwitz e seja $H$ a matriz de Hurwitz associada $H = (d_{2j-i})$ sejam $i_r$ e $j_r$, $(r = 1,\ldots,p)$ tais que, $i_1 < 1_2 < \ldots < i_p$ $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$. Então para que

$$H\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} > 0,$$

é necessário e suficiente que todos os elementos da diagonal $d_{2j_r-i_r}$ $(r = 1,\ldots,p)$ são positivos, equivalentemente, que

$$0 \leq 2j_r - i_r \leq n \quad r = 1,\ldots,p.$$

A demonstração deste Teorema é por indução sobre o grau $n$ do polinômio $f(x)$ e além disso utiliza-se o seguinte Lema.

Seja $f$ um polinômio de Hurwitz de grau $n \geq 1$ então existe um único polinômio de Hurwitz

$$f_1(x) = d_0^{'}x^{n-1} + d_1^{'}x^{n-2} + \ldots + d_{n-2}^{'}x + d_{n-1}^{'}$$

de grau $n-1$ e uma única constante $c$ tal que

$$d_{2j+1} = d_{2j}^{'} \quad \text{e} \quad d_{2j} = d_{2j-1}^{'} + cd_{2j}^{'}$$

para qualquer inteiro $j$. Aqui $d_j^{'} = 0$ quando $j < 0$ ou $j \geq 0$.

## Referências


[1] F. R. Gantmacher "The Theory of Matrices", SIAM, New York, 1974.

[2] Olga Holtz, Hermite-Biehler, Routh-Hurwitz, and total positivity, *Linear Algebra and its applications.*, 372 (2003) 105-110.

[3] J. H, B. Kemperman, A Hurwitz Matriz is Totally Positive, *SIAM J. MATH. ANAL.*, 13 (1982) 331-341.

[4] N. D. Obrechkoff "Zeros of Polynomials", Sofia, 2003.