

# Simulação de um escoamento em uma cavidade através do método MAC

**Vanessa Avansini Botta,**

Depto de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP,  
19060-900, Presidente Prudente, SP  
E-mail: botta@fct.unesp.br,

**Vanessa Bertoni**

Depto de Matemática, ICE, UFJF  
36036-330, Juiz de Fora, MG  
E-mail: bertcast@gmail.com

**Resumo:** *O escoamento forçado pelo movimento da tampa de uma cavidade é um típico problema usado para a avaliação de algoritmos numéricos para as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Neste trabalho foi realizada uma simulação numérica para este escoamento através do método MAC (marker and cell), utilizando uma cavidade discretizada por meio de uma malha deslocada.*

## 1 Introdução

Em algumas ciências, como na Física e na Engenharia, por exemplo, é comum o uso de equações diferenciais para representar fenômenos reais. A área de mecânica dos fluidos, em especial, possui uma grande possibilidade de aplicações, como na Engenharia Aeronáutica, por exemplo, onde os cálculos auxiliam no aumento da sustentação aerodinâmica e na diminuição da resistência em aeronaves.

Os conceitos de mecânica dos fluidos estão fundamentados em três leis, que são: conservação da massa, conservação da quantidade de movimento (também conhecida como segunda lei de Newton) e conservação da energia (primeira lei da termodinâmica). Essas leis podem ser representadas através de equações diferenciais parciais que modelam o escoamento de um fluido. Neste trabalho, daremos um enfoque principal às equações utilizadas na formulação da lei da conservação da quantidade de movimento, que no caso de escoamentos in-

compressíveis são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (3)$$

onde

$$\nabla^2 w = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$u$  e  $v$  são as velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido. Estas equações recebem o nome de equações de Navier-Stokes, em homenagem a Louis M. H. Navier (1785-1836) e George Stokes (1819-1903).

As formulações das outras leis de conservação podem ser encontradas em [3].

O objetivo deste trabalho é simular numericamente um escoamento forçado pelo movimento da tampa de uma cavidade através das equações (1), (2) e (3), sujeitas a algumas condições iniciais e de contorno que serão apresentadas adiante, e do método MAC, descrito na próxima seção.

O problema é caracterizado da seguinte forma: a cavidade, de altura  $H$  e comprimento  $L$ , cujas paredes são sólidas e impermeáveis, tem seu interior totalmente preenchido com o fluido. Inicialmente, a tampa da cavidade e o fluido estão em repouso. No instante  $t_0$ , ao acelerar instantaneamente a tampa da cavidade para a

velocidade  $u_0$ , temos a origem do escoamento. Neste problema, estamos considerando as velocidades  $u$  e  $v$  nulas no contorno da cavidade, que tem dimensões  $H = L = 1$ . Na tampa da cavidade temos  $u = 1$  e  $v = 0$ , como podemos observar na Figura 1. Além disso,  $\rho = 1$  e  $Re = \frac{u_0 H}{\nu} = \frac{1}{\nu}$ , que é o número de Reynolds, que define se um escoamento é laminar ou turbulento. Mais detalhes a respeito destes tipos de escoamentos podem ser encontrados em [3].

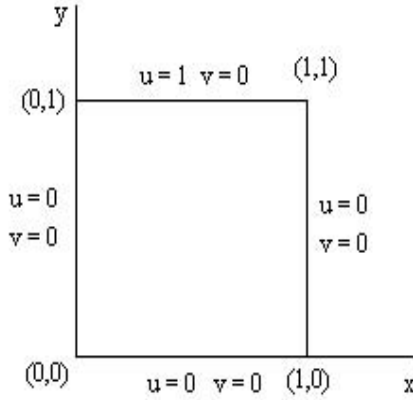


Figura 1: Descrição do problema.

A simulação foi feita para número de Reynolds 10 e 100 em duas malhas, uma  $20 \times 20$  e outra  $30 \times 30$ .

## 2 Método

O método MAC (marker and cell), descrito em 1965 por Harlow e Welch [2], foi desenvolvido para simular tanto escoamentos internos como externos com superfícies livres. Como exemplo temos as simulações de queda de uma gota d'água e de ondas quebrando na praia.

Sejam  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, \dots, NI$  e  $j = 1, \dots, NJ$  pontos da malha definida por  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ ,  $\Delta x = \frac{1}{NI}$ ,  $\Delta y = \frac{1}{NJ}$  e  $\Delta t = 10^{-3}$ . Para discretizar a cavidade, utilizamos uma malha deslocada, que consiste em calcular os valores para as variáveis da seguinte forma:

- a variável  $u$  (ou a velocidade  $u$ ) é calculada no ponto  $\left(i \pm \frac{1}{2}, j\right)$ ;
- a velocidade  $v$  é calculada em  $\left(i, j \pm \frac{1}{2}\right)$ ;

- a pressão  $p$  é calculada no ponto  $(i, j)$ .

Para facilitar a implementação, basta somar  $\frac{1}{2}$  ao índice  $i$  e  $\frac{1}{2}$  ao índice  $j$  para as velocidades  $u$  e  $v$ , respectivamente, obtendo  $u_{i,j}$  no lugar de  $u_{i-\frac{1}{2},j}$ ,  $u_{i+1,j}$  em vez de  $u_{i+\frac{1}{2},j}$ ,  $v_{i,j}$  substituindo  $v_{i,j-\frac{1}{2}}$  e  $v_{i,j+1}$  no lugar de  $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ . Os índices para a pressão não se alteram.

No tempo  $t = 0$ , as variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$  são inicializadas com zero em todo o domínio. No contorno, as velocidades  $u$  e  $v$  são nulas e na tampa da caixa temos  $u = 1$  e  $v = 0$ . As condições de fronteira sobre as paredes laterais e inferior são não escorregadias. Assim, para  $i = 1, 2, 3, \dots, NI - 1$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, NJ - 1$ , temos  $u_{i-\frac{1}{2},0} = 0$ , ou seja,  $\frac{u_{i,1} + u_{i,2}}{2} = 0$ , obtendo  $u_{i,1} = -u_{i,2}$  na parede inferior e, da mesma forma,  $v_{1,j} = -v_{2,j}$  e  $v_{NI,j} = -v_{NI-1,j}$  nas paredes laterais. Para a tampa superior, devido à movimentação, temos a seguinte condição de fronteira, obtida pela técnica de reflexão<sup>1</sup>: para  $i = 1, 2, 3, \dots, NI - 1$ ,  $u_{i,NJ} = 2u_0 - u_{i,NJ-1}$ .

Para a discretização temporal das equações de momento, foi utilizado o método de Euler explícito, onde todos os termos que envolvem velocidades são discretizados no nível de tempo  $n$ . O termo que envolve a pressão é discretizado no nível de tempo  $n + 1$ . Então, depois de calcular as velocidades  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ , todas as variáveis do escoamento são avançadas no tempo. A derivada temporal é discretizada por diferenças progressivas de  $O(\Delta t)$ .

Para discretizar a equação (2) no ponto  $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$ , foram utilizadas as equações

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{\bar{u}_{i+1,j} u_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j} u_{i,j}}{\Delta x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(wv)}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{\alpha}{\Delta y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{\beta}{(\Delta x)^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{\gamma}{(\Delta y)^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (9)$$

<sup>1</sup>Técnica onde o valor de  $u_{i,NJ}$  é dado pela extrapolação da reta que passa sobre os valores de  $u_0$  e  $u_{i,NJ-1}$ .

onde

$$\begin{aligned}\alpha &= u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \\ \beta &= u_{i-\frac{1}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{3}{2},j}, \\ \gamma &= u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}.\end{aligned}$$

As equações (4) e (5) apresentam os termos  $u_{i+1,j}^2$ ,  $u_{i,j}^2$ ,  $(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$  e  $(uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ , que não estão definidos na malha. Para resolver esse problema, devemos obter aproximações desses termos através de interpolações. Então, sejam  $\bar{u}_i = \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}}{2}$  e  $\bar{u}_{i+1} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{3}{2},j}}{2}$ . Para  $u_{i,j}$  e  $u_{i+1,j}$ , consideremos a função de interpolação “upwind”, representada por

$$u_{i,j} = \left(\frac{1+S_{i,j}}{2}\right)u_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\frac{1-S_{i,j}}{2}\right)u_{i+\frac{1}{2},j} \quad (10) \text{ e}$$

$$\text{onde } S_{i,j} = S(\bar{u}_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{u}_{i,j} \geq 0 \\ -1 & \text{se } \bar{u}_{i,j} < 0 \end{cases}.$$

Obtemos  $u_{i+1,j}$  substituindo  $i$  por  $i+1$  em (10).

Substituindo as equações (4), (5), (6), (7), (8) e (9) em (2), obtemos

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^n + (\Delta t) \left( \delta - \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\rho(\Delta x)} \right), \quad (11)$$

onde

$$\delta = -Conv_{i+\frac{1}{2},j}^n + Visc_{i+\frac{1}{2},j}^n$$

e  $Conv^n$  e  $Visc^n$  são os termos convectivos e viscosos, no tempo  $n$ , dados respectivamente por

$$Conv_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{(u^2)_{i+1,j}^n - (u^2)_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y}$$

$$Visc_{i+\frac{1}{2},j}^n = \nu \frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{3}{2},j}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$+ \nu \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n}{(\Delta y)^2}.$$

O termo  $F_{i+\frac{1}{2},j}^n$  é definido por

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^n = u_{i+\frac{1}{2},j}^n + (\Delta t)\delta. \quad (12)$$

Assim,

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = F_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x}. \quad (13)$$

Procedendo de maneira análoga para a discretização da equação (3) no ponto  $\left(i, j + \frac{1}{2}\right)$ , obtemos

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}, \quad (14)$$

onde

$$G_{i,j+\frac{1}{2}}^n = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (\Delta t)\lambda \quad (15)$$

$$Conv_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\xi}{\Delta y} + \frac{\sigma}{\Delta x}$$

$$Visc_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \nu \left( \frac{\eta}{(\Delta y)^2} + \frac{\varphi}{(\Delta x)^2} \right)$$

$$\lambda = -Conv_{i,j+\frac{1}{2}}^n + Visc_{i,j+\frac{1}{2}}^n$$

$$\xi = (v^2)_{i,j+1}^n - (v^2)_{i,j}^n$$

$$\sigma = (uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$$

$$\eta = v_{i,j-\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i,j+\frac{3}{2}}^n$$

$$\varphi = v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n$$

Então, depois de determinados  $F_{i+\frac{1}{2},j}^n$  e  $G_{i,j+\frac{1}{2}}^n$  por meio de (12) e (15), devemos calcular os valores desses termos para todos os pontos do domínio. Na fronteira, os valores de  $F^n$  e  $G^n$  podem ser substituídos pelas respectivas componentes normais da velocidade no nível de tempo  $n+1$ . Como as paredes são impermeáveis, essas componentes são todas nulas. Assim, nas paredes esquerda e direita, temos, para  $j = 2, \dots, NJ-1$ ,  $F_{2,j}^n = 0$  e  $F_{NI,j}^n = 0$ , e nas paredes superior e inferior, para  $i = 2, \dots, NI-1$ , temos  $G_{i,2}^n = 0$  e  $G_{i,NJ}^n = 0$ .

Consideremos agora a equação (1). Discretizando-a no nível de tempo  $n+1$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j}^{n+1} &\approx \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x} \\ &+ \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} = 0.\end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima as expressões (13), (14) e as expressões correspondentes para  $u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}$  e  $v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}$ , obtemos a versão discreta da equação de Poisson para a pressão,

que é

$$\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}$$

$$= \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \right)$$

Como o gradiente da pressão é nulo nas fronteiras, temos, para  $i = 2, \dots, NI - 1$  e  $j = 2, \dots, NJ - 1$ ,  $p_{1,j} = p_{2,j}$  e  $p_{NI,j} = p_{NI-1,j}$  (paredes esquerda e direita) e  $p_{i,1} = p_{i,2}$  e  $p_{i,NJ} = p_{i,NJ-1}$  (paredes superior e inferior).

Para calcular os valores para as velocidades e pressão no nível de tempo  $n + 1$ , seguimos os seguintes passos:

1. para obter  $p^{n+1}$ , utilizamos o método SOR por ponto (successive over relaxation), com critério de parada

$$\|R\|_2 = \left( \sum_{i=2}^{NI-1} \sum_{j=2}^{NJ-1} R_{i,j}^2 \right)^{1/2} \approx 10^{-8},$$

onde

$$R_{i,j} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{F}{\Delta x} + \frac{G}{\Delta y} \right) - \left( \frac{\varpi}{(\Delta x)^2} + \frac{\epsilon}{(\Delta y)^2} \right),$$

e

$$F = F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n$$

$$G = G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\varpi = p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}$$

$$\epsilon = p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1};$$

2. após a convergência do método PSOR (point successive over relaxation) e a obtenção do campo de pressões no nível de tempo  $n + 1$ , determinamos as componentes  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$  pelas expressões (13) e (14).

O critério de parada escolhido para este problema é

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \sum_{i=2}^{NI-1} \sum_{j=2}^{NJ-1} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n| + |v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n| \right) \leq \frac{10^{-6}}{N} \quad (16)$$

onde  $N$  é o número de células em que se calcula a pressão. Esse critério foi escolhido porque quanto menor for o termo entre parênteses na expressão (16), mais perto estaremos do estado estacionário.

### 3 Resultados

Apresentamos, a seguir, os resultados obtidos pela implementação do método MAC para o problema da cavidade.

O algoritmo foi implementado em linguagem C e os gráficos foram feitos no software Mathematica.

As figuras apresentam a direção do escoamento dentro da cavidade. Nas Figuras 2 e 3, respectivamente, temos o campo de velocidade para uma malha  $20 \times 20$  com  $Re = 10$  e  $Re = 100$ . Refinando a malha para  $30 \times 30$ , podemos observar, através das Figuras 4 e 5, melhores detalhes do escoamento. Devido à movimentação, as maiores velocidades ocorrem próximas à tampa da cavidade. Além disso, se o número de Reynolds é grande, o escoamento é turbulento, como podemos observar nas Figuras 3 e 5.

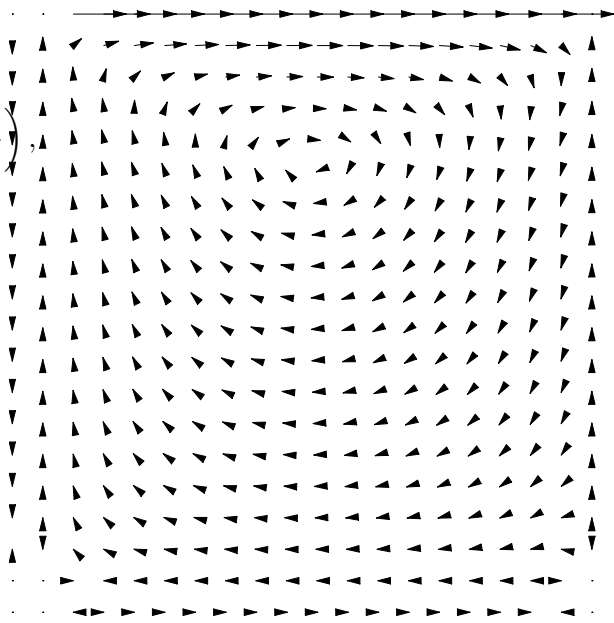


Figura 2: Vetores indicando a direção do escoamento para  $Re = 10$  numa malha  $20 \times 20$ .

### 4 Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma simulação numérica do escoamento de um fluido dentro de uma cavidade, obtido através do movimento da tampa. A solução numérica apresentada é importante porque através dela podemos prever o comportamento do fluido dentro da cavidade. Além disso, como os problemas que envolvem escoamento de um fluido são usados em

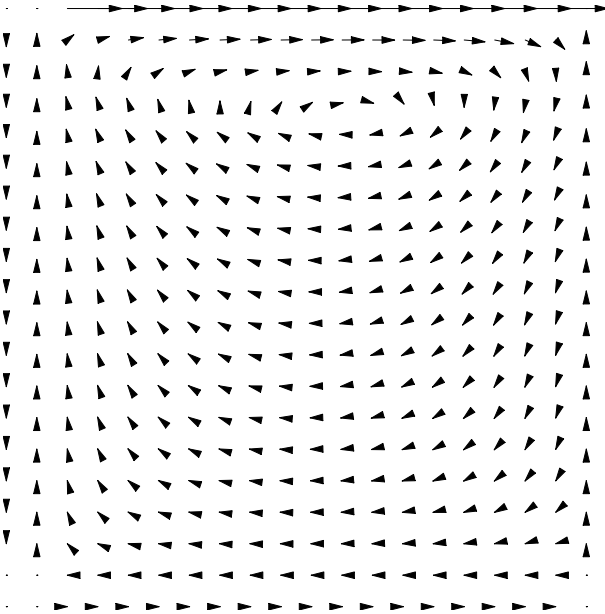


Figura 3: Vetores indicando a direção do escoamento para  $Re = 100$  numa malha  $20 \times 20$ .

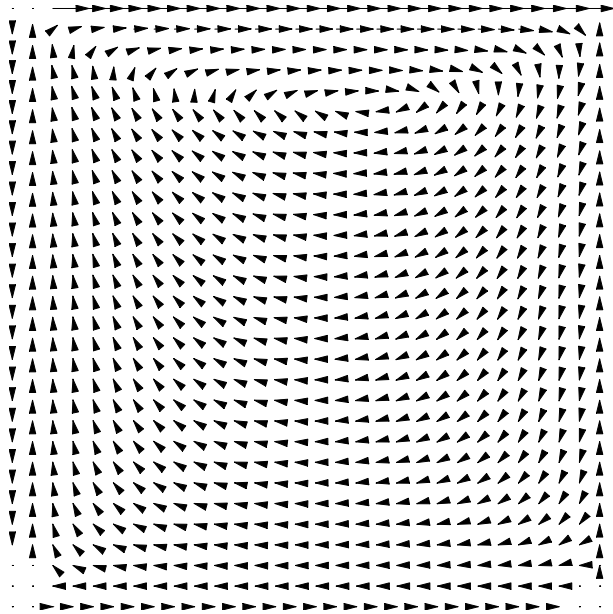


Figura 5: Vetores indicando a direção do escoamento para  $Re = 100$  numa malha  $30 \times 30$ .

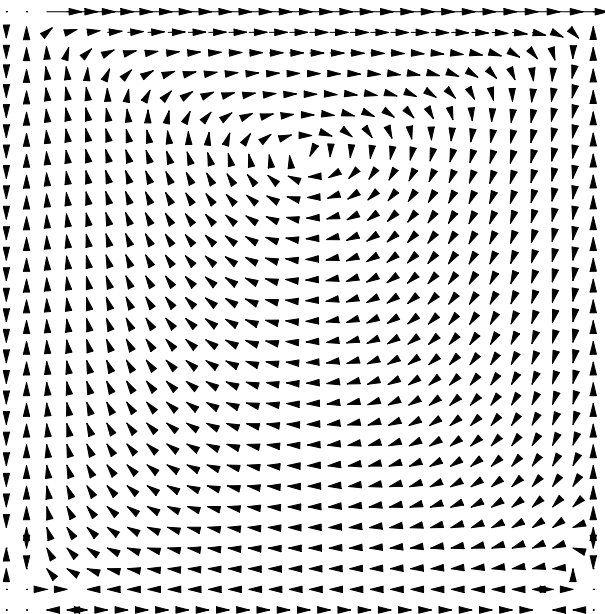


Figura 4: Vetores indicando a direção do escoamento para  $Re = 10$  numa malha  $30 \times 30$ .

várias ciências, é importante a representação numérica do problema, pois, em alguns casos, a solução exata é muito complexa.

## Referências

- [1] A. O. Fortuna, “Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos - conceitos básicos e aplicações”, Edusp, São Paulo, 2000.

- [2] F. H. Harlow and J. E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, 8 , 2182 (1965).
- [3] M. C. Potter e D. C. Wiggert, “Mecânica dos fluidos”, Thomson, São Paulo, 2004.