

# Modelo ARX de Núcleos MEMS utilizando os Estimadores Recursivos: Mínimos Quadrados e Variável Instrumental

**Manuel M. P. Reibold<sup>1</sup>**

**Gideon V. Leandro<sup>1</sup>**

**Wang Chong<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Departamento de Tecnologia  
98700-000, Ijuí, RS

E-mail: {gede, manolo, wang}@unijui.edu.br

**Renato P. Ribas**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Informática  
91501-970, Campus do Vale, Porto Alegre, RS

E-mail: rpribas@inf.ufrgs.br

**Resumo:** O presente trabalho aborda, via estimação, a obtenção dos parâmetros característicos de dispositivos MEMS. As estruturas alvo são núcleos de micro-rotor, cuja massa, amortecimento e coeficiente de elasticidade são extraídos através do modelo discreto ARX e os estimadores recursivos: mínimos quadrados e variável instrumental. Os dados comportamentais de entrada e saída,  $f(k)$  e  $x(k)$  respectivamente, necessários para a identificação desses parâmetros, usados em macro-modelos, são obtidos através de simulações utilizando o software ANSYS®. Os resultados experimentais obtidos para as três topologias de micro-núcleos, com grau de liberdade um, demonstram que os parâmetros extraídos quando aplicados a modelos analíticos resultam em estimativas satisfatórias de comportamento, o que motiva a aplicação de outras técnicas disponíveis na ciência da identificação de sistemas.

**Palavras-Chave:** MEMS; Micro-núcleos; Identificação de Sistemas; Modelo ARX; Estimador RLS; Estimador IV.

## 1. Introdução

Os sistemas micro-eletromecânicos (*Micro Electro-Mechanical Systems* MEMS) são micro-transdutores que desempenham funções de transdução e atuação. Tais dispositivos quando convenientemente dispostos integram: relés, pinças, osciladores, filtros, transformadores, mixers, giroscópios, acelerômetros, entre outros, como mostra a figura 1 [1,2,8]. São dispositivos construídos por métodos de micro-usinagem utilizados na área da microeletrônica. Os MEMS vêm recebendo especial atenção da indústria, de

forma que o consumo destes dispositivos dobrou nos últimos cinco anos, e o mesmo projeta um crescimento em taxas cada vez maiores [13].

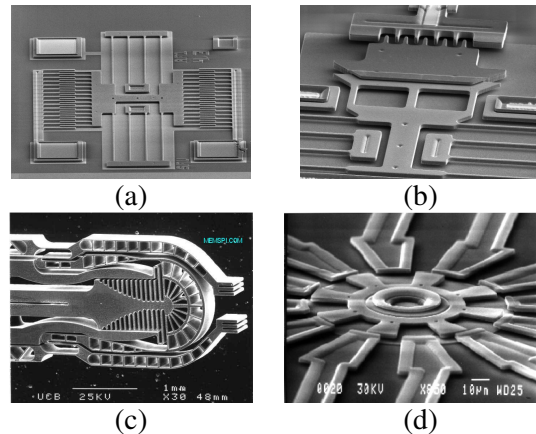


Figura 1. MEMS (a) Motor translacional (b) Interruptor (c) Pinça para cauterização (d) Motor rotacional [15].

A modelagem e a simulação dessas micro-estruturas é uma tecnologia emergente que vem ganhando interesse nos setores: automotivo, biomédico, telecomunicações, industrial, aeroespacial e militar. A modelagem dessas microestruturas propõe uma hierarquia de quatro níveis: sistema; dispositivo; comportamento físico; e processo [5]. A modelagem direciona seus esforços na captura do desempenho físico dessas micro-estruturas nos diferentes domínios da energia, de forma a expressá-lo num modelo dinâmico compacto, o qual permita agilidade na análise, rapidez nos cálculos e sua inserção em nível de sistema. Esse modelo dinâmico e compacto ou macro-modelo, ou também, modelo de ordem reduzida, deve ser energeticamente correto, conservador e dissipador quando

necessário; possuir dependência das propriedades do material e da geometria do dispositivo. Também deve representar o desempenho estático e dinâmico para pequenas ou grandes amplitudes de excitação e resposta. Finalmente o macro-modelo deve concordar com os resultados de simulações 3D a nível físico e com os resultados experimentais obtidos a partir dos dispositivos de teste. Respeitando essas condições, a dinâmica dessas micro-estruturas pode ser conectada a outros dispositivos, tanto mecânicos como eletro-eletrônicos, em nível de sistema, permitindo obter o comportamento dinâmico de um sistema mais complexo. Dois são os métodos utilizados na modelagem em nível de sistema: modelo baseado em projeto ou linguagem de descrição de hardware (*Hardware Description Language* HDL) e modelo analítico baseado em Equações Diferenciais Ordinárias (*Ordinary Differential Equations* EDO) [5,12]. Este trabalho foca a utilização de EDOs pela familiarização que se tem com a sua utilização.

Várias técnicas têm sido propostas para a obtenção do macro-modelo de MEMS como é o método Arnoldi aplicado a regime linear, e estendido ao regime não-linear. A análise linear é outro método utilizado, que consiste em gerar funções base. Também tem se utilizado a análise modal, decomposição Karhunen-Loeve (KLD), decomposição de valor singular (SVD) e redes neurais baseadas no algoritmo de Hebbian. Outros métodos resultam da combinação dos métodos expostos anteriormente. A desvantagem de todos eles consiste que as funções base não estão sempre disponíveis e não capturam todas as características do fenômeno físico pela variada geometria dos MEMS e das minúsculas dimensões tanto do dispositivo como do ambiente em que operam [6,16].

Na última década, ainda, continuam os esforços para obter modelos matemáticos precisos em nível de sistema para MEMS. Entre os métodos alternativos que sobressaem estão aqueles que necessitam de pouco ou nenhum conhecimento prévio dos fenômenos físicos envolvidos para extrair os parâmetros característicos, como é o caso das técnicas de identificação de sistemas [3,7]. Estas possuem muitas aplicações em varias áreas científicas, mas quando aplicadas a MEMS se focam em modelos não-paramétricos [4,9,10,17,18].

Assim, este trabalho investigativo vem contribuir com a modelagem matemática de MEMS aplicando as técnicas de identificação a três topologias de micro-núcleos com um grau de liberdade. Para o qual utiliza se o modelo discreto auto-regressivo com entradas exógenas (*Autoregressive with Exogenous Inputs*-ARX) e os estimadores recursivos: mínimos quadrados (*Recursive Least Squares*-RLS) e variável instrumental (*Instrumental Variable*-IV). Ambos são aplicados ao conjunto de dados de entrada e saída, respectivamente, força  $f(k)$  e deslocamento  $x(k)$ , os quais são obtidos a partir da plataforma de teste desenvolvida em simulador de elementos finitos (*Analysis Systems*-ANSYS®). O comportamento do modelo com os parâmetros característicos identificados é comparado com o desempenho dos resultados experimentais da plataforma de testes utilizando-se MATLAB®.

## 2. Topologias de Núcleos Elásticos MEMS

O funcionamento básico dos micro-núcleos elásticos MEMS está associado ao conhecimento da frequência de ressonância dos mesmos, a qual é definida pelas propriedades dos materiais e sua forma geométrica. Em outras palavras, o desempenho ótimo da força aplicada versus deslocamento depende do conhecimento preciso dos valores da massa e do coeficiente de elasticidade do núcleo, associado ao amortecimento do ambiente no qual está inserido [15].

Os núcleos elásticos se constituem basicamente de vigas e colunas como elementos não rígidos (deformáveis), e de âncoras (ou engastes) e massa como elementos rígidos (não deformáveis). A viga é o elemento formado por uma barra de eixo plano e é sempre submetida a esforços contidos no mesmo plano. Dois tipos de vigas são importantes para a construção de núcleos elásticos: vigas isostáticas e vigas hiperestáticas, cuja diferença básica está nos engastes das mesmas. Além das vigas, outro elemento importante são as colunas, as quais suportam forças de tensão ou compressão aplicadas ao longo do eixo longitudinal. A combinação desses elementos pode gerar diferentes topologias de micro-núcleos.

A partir do levantamento feito na literatura técnica e científica, foram identificadas três topologias genéricas de núcleos elásticos, com um grau de liberdade conforme mostra a figura 2 e dimensões geométricas e propriedades do ambiente segundo as tabelas 1 e 2.

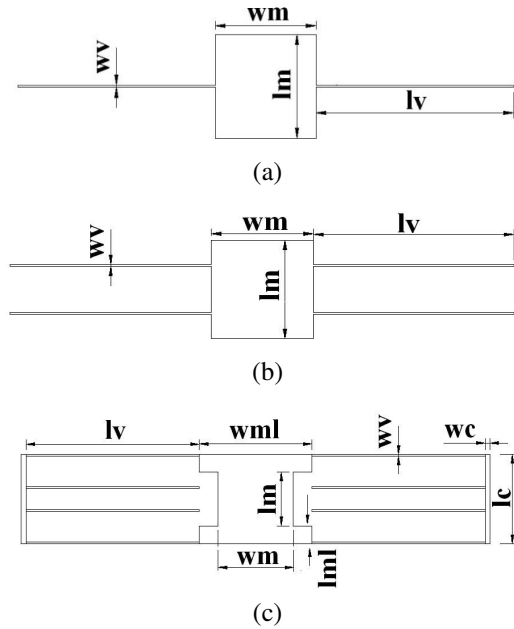


Figura 2: Núcleos elásticos com um grau de liberdade, designados por: (a) tipo N1, (b) tipo N2, e (c) tipo N3.

Tabela 1. Propriedades do ambiente e do material.

|                        | Valor                   | U                  | Definição                       |
|------------------------|-------------------------|--------------------|---------------------------------|
| E                      | $140 \times 10^9$       | N/m <sup>2</sup>   | Modulo de Young do Poli-silício |
| $\rho_{\text{oli}}$    | $2.33 \times 10^3$      | Kg/m <sup>3</sup>  | Densidade do Poli-silício       |
| $\epsilon_0$           | $8.854 \times 10^{-12}$ | C/Nm <sup>2</sup>  | Permissividade do vácuo         |
| $\epsilon_{\text{ar}}$ | 1.006                   |                    | Permissividade relativa do ar   |
| $u_{\text{ar}}$        | $1.8 \times 10^{-5}$    | N.s/m <sup>2</sup> | Viscosidade absoluta do ar      |
| $\rho_{\text{ar}}$     | 1.22                    | Kg/m <sup>3</sup>  | Densidade do ar                 |

Tabela 2. Geometria dos núcleos.

|       | Valor                | U | Definição             |
|-------|----------------------|---|-----------------------|
| h     | $2.1 \times 10^{-6}$ | m | Espessura do núcleo   |
| $w_v$ | $2 \times 10^{-6}$   | m | Largura da viga       |
| $l_v$ | $200 \times 10^{-6}$ | m | Comprimento da viga   |
| $w_m$ | $102 \times 10^{-6}$ | m | Largura da massa      |
| $l_m$ | $102 \times 10^{-6}$ | m | Comprimento da massa  |
| $w_c$ | $11 \times 10^{-6}$  | m | Largura da coluna     |
| $l_c$ | $100 \times 10^{-6}$ | m | Comprimento da coluna |
| d     | $2 \times 10^{-6}$   | m | Vão abaixo da viga    |
| e     | $2 \times 10^{-6}$   | m | Vão acima da viga     |

O critério de seleção dos micro-núcleos se baseia na simplicidade da sua topologia e no movimento de translação ser numa única direção. Os dados apresentados na tabela 2 são válidos para os núcleos tipo N1, entretanto, para o núcleo N2 o comprimento  $l_m$  é  $102 \times 10^{-6}$  m e a largura  $w_m$  é  $204 \times 10^{-6}$  m. Para o núcleo tipo N3, o comprimento  $l_m$  e a largura  $w_m$  possuem, respectivamente, os valores de  $60 \times 10^{-6}$  m e  $86.66 \times 10^{-6}$  m, e para as massas laterais da mesma estrutura tem-se  $w_{ml}$  igual a  $130 \times 10^{-6}$  m e  $l_{ml}$  igual a  $20 \times 10^{-6}$  m.

### 3. Identificação de Sistemas

De forma geral, as técnicas de modelagem matemática são agrupadas em duas grandes categorias. Na primeira categoria os parâmetros tem significado físico e sua aproximação denomina-se de modelo fenomenológico. Na segunda categoria os parâmetros não possuem significado físico, por tal motivo denominam-se de modelos comportamentais. Comparando ambas as categorias se estabelece que os modelos fenomenológicos quanto a esforço de simulação e tempo de processamento são demorados e dispendiosos. Entretanto, os comportamentais são fáceis e rápidos. Com relação à informação a priori, os modelos fenomenológicos a consideram; em contrapartida os modelos comportamentais não a consideram. Outro aspecto relevante é a validade, a qual nos modelos fenomenológicos é elevada se a estrutura de teste estiver correta. Nos modelos comportamentais é restrita [7].

A modelagem fenomenológica ou identificação consiste em coletar, através de amostras, o sinal de entrada e o sinal de saída conforme a figura 3, para o qual o processo é dividido em cinco etapas principais: testes dinâmicos e coleta de dados, escolha da representação matemática a ser usada, determinação da estrutura do modelo, estimação de parâmetros e validação do modelo [3].

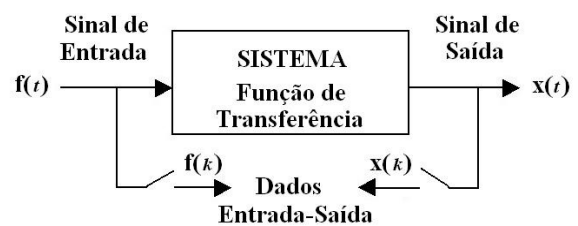


Figura 3. Identificação de sistemas.

Esse procedimento é válido tanto para sistemas lineares como para sistemas não-lineares. Os três núcleos alvo, deste trabalho investigativo, são considerados sistemas lineares, pois se deseja estudar o desempenho desses numa faixa relativamente estreita de operação. Cabe salientar que a linearidade normalmente simplifica o modelo a ser desenvolvido, o que deve diminuir, em princípio, a demanda computacional.

### 3.1 Testes dinâmicos e coleta de dados

A coleta de dados é feita a partir da plataforma de testes desenvolvida com o aplicativo ANSYS. A força  $f(t)$  versus deslocamento  $x(t)$  de cada um dos micro-núcleos é apresentado na figura 4.

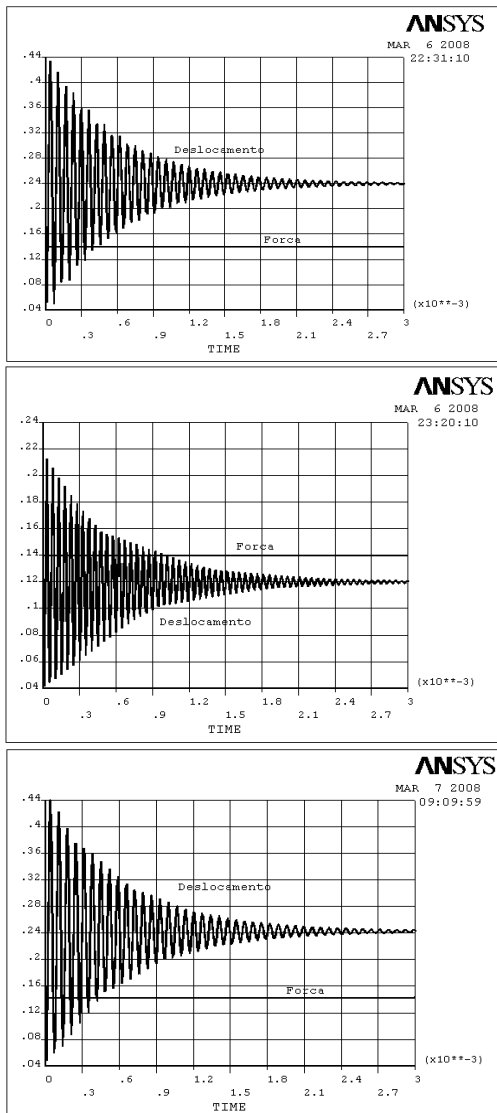


Figura 4. Resposta ao degrau força (a) núcleo N1; núcleo N2; (c) núcleo N3.

O ANSYS é uma ferramenta computacional que permite fazer simulação com diferentes tipos de análises: Estática, Modal, Harmônica, Dinâmica de Transitórios, e Espectral. Para os sinais amostrados,  $f(k)$  e  $x(k)$ , reter as características fundamentais do sinal original, é necessário obedecer ao teorema de Shannon definido através da expressão (1).

$$f_a \geq 2 f_s \quad (1)$$

onde  $f_a$  é a frequência de amostragem e  $f_s$  é a frequência do sinal a ser amostrado. Como o sinal de excitação é um degrau e ainda, os critérios de projeto estabelecem que a faixa de frequência de amostragem deva ser 5 a 10 vezes a frequência do sinal a ser amostrado, o valor adotado para o intervalo de amostragem é  $5 \times 10^{-6}$  s.

### 3.2 Representação matemática

Esta etapa do procedimento consiste em selecionar a estrutura de modelo e ajustar seus parâmetros até que as saídas calculadas pelo modelo coincidam com as saídas medidas do processo. O sistema e o modelo devem ser submetidos às mesmas condições. Na identificação de sistemas lineares dispõe-se de modelos do tipo: auto-regressivo com entradas exógenas, ARX, auto-regressivo com média móvel e entradas exógenas, ARMAX, saída e erro, OE e modelo de Box-Jenkins, entre outros. O modelo selecionado, para realização deste estudo, é o ARX cuja representação obedece à expressão (2).

$$A(q)x(k) = B(q)f(k) \quad (2)$$

$$A(q) = a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_y} q^{-n_y}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_u} q^{-n_u}$$

onde  $A(q)$  e  $B(q)$  são os polinômios que contém, respectivamente, os pólos e os zeros do sistema;  $q$  é operador de atraso;  $n_y$  e  $n_u$  os maiores atrasos dos polinômios  $A(q)$  e  $B(q)$ . A escolha deste modelo se deve ao fato da sua função de transferência ser simples, não adiciona novos parâmetros e está unicamente relacionado com os parâmetros da função de transferência dos núcleos. Conforme esta seja rearranjada simplifica-se, reduzindo o número de parâmetros, os quais passam a ser obtidos posteriormente de forma indireta. Assim,

diminui-se consideravelmente o trabalho computacional.

### 3.3 Determinação da estrutura

Escolher a ordem do modelo é a finalidade desta etapa, o que resulta no modelo discreto para os micro-núcleos na expressão (3).

$$x(k) = \begin{bmatrix} -x(k-1) - x(k-2) + f(k-1) \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os parâmetros do sistema discreto a ser estimados. Neste trabalho o modelo é de segunda ordem, e sua escolha é feita com base no modelo analítico utilizado pela física, que é utilizado para sistemas com deslocamentos translacionais.

### 3.4 Estimação de parâmetros

Tendo disponibilizado os dados em forma seqüencial, os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são obtidos através de estimação recursiva. Neste trabalho investigativo duas técnicas são utilizadas: mínimos quadrados e variáveis instrumentais. Logo a expressão (3) pode ser escrita segundo a expressão (4).

$$x(k) = \varphi^T \hat{\theta} \quad (4)$$

onde  $\varphi$  é o vetor de regressores e  $\theta$  é o vetor que contém os parâmetros a serem identificados. O ponto de partida dos algoritmos recursivos para a solução da expressão (4) obedece à expressão (5).

$$x(k) = \varphi_k^T (k-1) \hat{\theta}_k \quad (5)$$

A partir da expressão (5), utiliza-se o estimador recursivo dos mínimos quadrados (RLS) ou estimador de variáveis instrumentais (IV). O estimador dos quadrados mínimos obedece às expressões recursivas (6), (7) e (8).

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \left[ x(k) - \varphi_k^T \hat{\theta}_{k-1} \right] \quad (6)$$

$$K_k = \frac{P_{k-1} \varphi_k}{\varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k + I} \quad (7)$$

$$P_k = P_{k-1} - K_k \varphi_k^T P_{k-1} \quad (8)$$

onde  $K_k$  é a matriz de ganho determinada a partir da covariância do esquema de atualização recursiva para que seja mínima, e  $P_k$  é a matriz de covariância do vetor dos

parâmetros a serem estimados.

Entretanto o estimador de variáveis instrumentais obedece às expressões (9), (10), (11) e (12).

$$M_k = M_{k-1} - \frac{M_{k-1} z_k \varphi_k^T M_{k-1}}{I + \varphi_k^T M_{k-1} z_k} \quad (9)$$

$$K_k = M_k z_k \quad (10)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \left[ x(k) - \varphi_k^T \hat{\theta}_{k-1} \right] \quad (11)$$

$$\zeta(k) = x(k) - \varphi_k^T \hat{\theta}_k \quad (12)$$

onde  $z_k$  é vetor de variáveis instrumentais na  $k$ -ésima iteração.

Fazendo uma comparação entre os dois algoritmos recursivos, pode se dizer que os mínimos quadrados é uma técnica eficiente e se relaciona muito bem com outros algoritmos, entretanto, tem a desvantagem de não estimar corretamente os parâmetros na ausência de ruído branco, porém o algoritmo de variáveis instrumentais possui a vantagem de estimar os parâmetros na presença de ruído colorido.

## 4. Resultados

Para comparação de resultados entre dados coletados da plataforma de teste ANSYS e o modelo identificado, o valor de  $0,14 \times 10^{-6} \text{N}$  de amplitude para o degrau de força é adotado convenientemente. Os valores obtidos dos parâmetros característicos para os micro-núcleos são apresentados na tabela 3.

Tabela 3. Parâmetros obtidos para os micro-núcleos N1, N2 e N3 com estimadores RLS e IV ( $T_a = 5 \times 10^{-6} \text{s}$ ).

| Tipo | $M_E\text{-Kg}$          | $C_E\text{-N s/m}$     | $K_E\text{-N/m}$ |
|------|--------------------------|------------------------|------------------|
| N1   | $54,75 \times 10^{-12}$  | $0,205 \times 10^{-6}$ | 0,583            |
| N2   | $109,51 \times 10^{-12}$ | $0,317 \times 10^{-6}$ | 1,167            |
| N3   | $63,10 \times 10^{-12}$  | $0,229 \times 10^{-6}$ | 0,591            |

O erro entre os estimadores RLS e IV para os micro-núcleos é apresentado na figura 7. Nela observa-se que o erro entre ambos estimadores e a plataforma de ensaio, para os três micro-núcleos, varia na faixa de 0 a 12% em regime transitório, entretanto, em regime permanente ( $t \geq 2,5 \mu\text{s}$ ) o erro tende a zero. No regime transitório o erro é elevado devido a estimação iniciar-se no valor zero, entretanto a medida que ela transcorre o erro tende a zero.

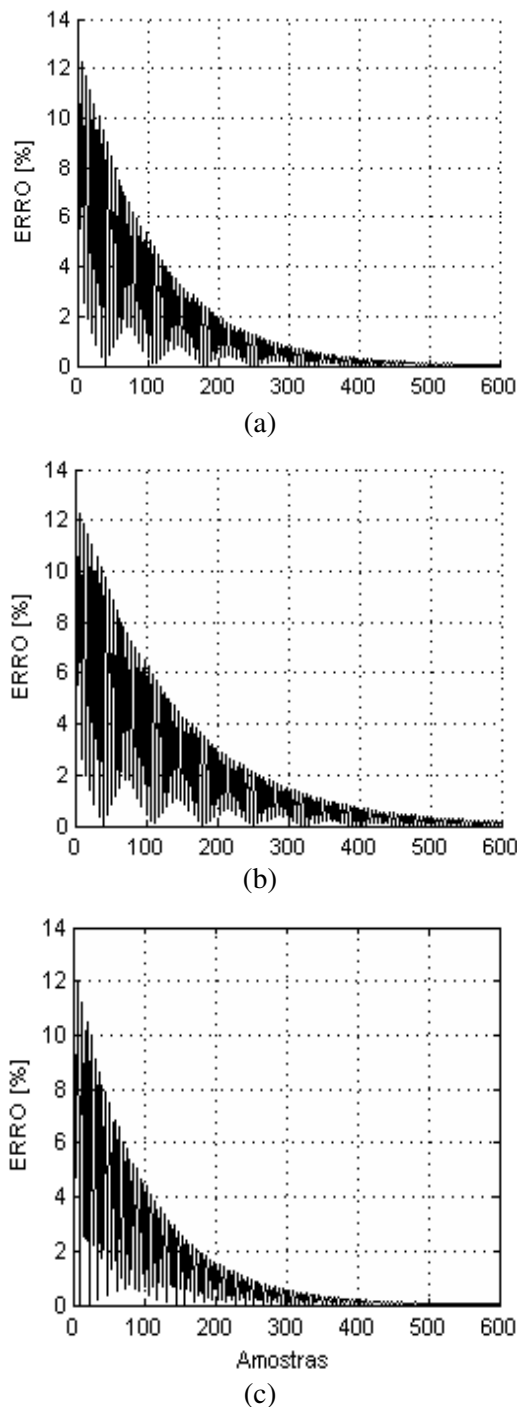


Figura 7. Erro entre a plataforma de teste e o modelo ARX tanto para o estimador RLS como para o IV (a) Núcleo tipo N1 (b) Núcleo tipo N2 (c) Núcleo tipo N3.

No regime permanente de operação, os parâmetros identificados estão próximos aos parâmetros das estruturas em teste. O ótimo desempenho do regime permanente é ocasionado pelo regime transitório. Cabe salientar que o estimador IV apresenta os valores semelhantes ao estimador LSR, porém

a matriz  $P_k$  deve apresentar ponderações iniciais diferente, pois caso contrário, o comportamento do o erro induz a pensar que há uma defasagem de comportamento entre o modelo identificado e a estrutura em teste.

## 5. Conclusão

A técnica utilizada, na realização deste trabalho, mostra-se interessante uma vez que permite extrair os parâmetros característicos, dos micro-núcleos, sem alterar as propriedades intrínsecas dos mesmos e do meio em que se encontram inseridos. São técnicas não invasivas, necessárias devido às minúsculas dimensões dos dispositivos utilizados neste estudo. A teoria da identificação estabelece que, o modelo estimado é satisfatório quando apresenta uma precisão de 95%. A precisão alcançada nos resultados deste trabalho é satisfatória, pois foi obtida sem inserção de ruído branco. Cabe salientar, também que, o modelo ARX e os estimadores RLS e IV não são inovadores, porém o presente trabalho é uma contribuição na identificação de modelos paramétricos para dispositivos MEMS. Também a forma como é conduzido este estudo investigativo torna seu procedimento inovador, pois os parâmetros não são extraídos da plataforma de testes, e sim identificados. Todos os fatos mencionados motivam a aplicação das outras técnicas que se encontram disponíveis na ciência da identificação, de forma a melhorar o resultado obtido. Por outro lado pretende-se, também em futuros trabalhos, injetar sinal perturbador junto ao sinal de excitação, o que deve melhorar a precisão, embora na prática, isto implique em onerar a plataforma de testes.

## Referências

- [1] C. Ajluni, “Pressure sensors strive to stay on top, electronic design”, 1994.
- [2] C. C. Beatty, Chronology of termal ink-jet structures, “Digest-Solid Sensor and actuator Workshop”, pp. 200-204, Hilton Head Island, SC, 1996.
- [3] M. V. Correa, Identificação caixa cinza de sistemas não-lineares utilizando representações NARMAX racionais e polinomias, UFMG, (2001).

- [4] M. Hassul, Frequency domain identification for undergraduates, *IEEE Transactions on Education*, Vol. 35, No. 4, pp. 368-375, (1992).
- [5] E. S. Hung, Generating Efficient dynamical models for microelectromechanical systems from few finite-element simulations run, *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 8, pp. 280-289, (1999).
- [6] R. M. Lin, Structural dynamics of microsystems-current state of research and future directions, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, pp. 1015-1043, (2006).
- [7] L. Ljung, "Systems Identification. Theory for the user", Prentice Hall, London, 1999.
- [8] C. Lu, M. Lemkin, B. E. Boser, A monolithic surface micromachined accelerometer with digital output, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 30, pp. 1367-1373, (1995).
- [9] Y. Lu, Design, fabrication and control of a micro x-y stage with large ultra-thin film recording media platform, "Proceedings of the 2005 IEEE/ASME, International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics", pp. 19-24, Monterey, California, 2005.
- [10] A. S. Phani, Coupling of resonant modes in micromechanical vibratory rate gyroscopes, *NSTI – Nanotech-2004*, Vol. 2, pp. 335-338, (2004).
- [11] S. D. Senturia, CAD for microelectromechanical systems. The 8th International Conference on Solid State Sensors and Actuators, and Eurosensors IX, Stockholm, Sweden, 1995.
- [12] S. D. Senturia, CAD challenges for microsensors, microactuators, and microsystems, *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, No. 8, 1998.
- [13] S. D. Senturia, Perspectives on MEMS, past and future: the tortuous pathway from beight ideas to real products, *Transducers'03, The 12th International Conference on Solid State Sensors, Actuators and Microsystems*, pp. 10, (2003).
- [14] S. Sung, Development and test of MEMS accelerometer with self-sustained oscillation loop. *Sensors and Actuators A*, 109, pp.1, (2003).
- [15] W. C. Tang, Electrostatic comb-drive of lateral poly-silicon resonators, *Sensors and Actuators A*, 21-23, pp.328-331, (1990).
- [16] H. A. C. Tilmans, Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: I. Lumped-parameter systems, *Journal Micromechanical Micro engineering*, Vol. 6, pp. 157-176, (1996).
- [17] H. Wolfram, Implementation issues on MEMS – A study on systems identification, *Chemnizer Fachtagung MST, Chemnitz*, pp. 1-8, (2005).
- [18] G. Zhou, A method to include micromechanical components into the systems level simulations, *Sensors and Actuators A*, 97-98, pp. 386-397, (2002).