

# Estimativas de erro em quantidades de interesse para soluções obtidas pelo método de Galerkin descontínuo.

**João L. Gonçalves**

IMECC - UNICAMP  
13083-859, Campinas, SP  
E-mail: jluis@ime.unicamp.br.

**Philippe R. B. Devloo**

FEC -UNICAMP  
13083-852, Campinas, SP  
E-mail: phil@fec.unicamp.br.

**Igor Mozolevski**

Depto de Matemática - UFSC  
88.040-900, Florianópolis, SC  
E-mail: igor.mozolevski@mtm.ufsc.br.

**Sônia Maria Gomes**

IMECC-UNICAMP  
13083-859, Campinas, SP  
E-mail: soniag@ime.unicamp.br.

**Resumo:** *Em diversas áreas aplicadas é comum o objetivo da modelagem ser a avaliação de um funcional da aproximação e não a aproximação. Como exemplos de funcionais de interesse podemos mencionar o valor médio da aproximação em um subdomínio, o valor da aproximação em um ponto e fluxo em uma parte da fronteira.*

*Em geral, desejamos apenas que o erro na avaliação do funcional satisfaça uma tolerância predeterminada. Dependendo do funcional a aproximação tem que ser muito boa para que o erro esteja na tolerância imposta, isto eleva muito o custo computacional. O custo computacional pode ser minimizado se enriquecermos o espaço de aproximação (refinamento da malha e/ou aumento da ordem de aproximação) principalmente nas partes do domínio que contribuem efetivamente na avaliação do funcional. A técnica de enriquecer o espaço de aproximação nas partes que mais contribuem na avaliação do funcional está sendo desenvolvida por um grande número pesquisadores, veja por exemplo [4] e suas referências.*

*Na seções 1 e 2 seguimos a notação e a descrição do método de Galerkin descontínuo, conforme apresentada em [2], para a equação de difusão-advecção-reação. Na seção 3 apresentamos a análise de erro a posteriori da aproximação de funcionais da solução de problemas de valores de fronteira para o método de elementos finitos de Galerkin descontínuo, conforme descritos nas seções 1 e 2. Usamos as estimativas apresentadas para desenvolver indi-*

*cadores de erro, que por sua vez são utilizados no processo de adaptação do espaço de aproximação. Na seção 4 apresentamos os resultados da estratégia apresentada na seção 3, para uma equação elíptica.*

## 1 Preliminares e Notação

Consideremos  $\Omega$  um domínio poliedral, aberto e limitado em  $\mathbb{R}^d$ , com a dimensão  $d \geq 2$ , e seja  $\Gamma$  a união das faces  $(d - 1)$ -dimensionais abertas de  $\partial\Omega$ . A equação de Difusão-Advecção-Reação, é dada por

$$-\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + cu = f, \quad (1)$$

em que assumimos  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $c \in L_\infty(\Omega)$ ,  $f$  e  $c$  são funções a valores reais. Além disso  $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^d$  é uma função vetorial cujas entradas  $b_i$  são funções a valores reais, Lipschitz contínuas em  $\bar{\Omega}$  e  $\mathbf{a} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$  é um tensor simétrico, cujas entradas  $a_{ij}$  são funções a valores reais, limitadas, contínuas por partes, definidas em  $\bar{\Omega}$  e que satisfazem a seguinte desigualdade

$$\zeta^T \mathbf{a}(x) \zeta \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad a.e. \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Assumidas estas hipóteses, chamamos (1) de uma *Equação Diferencial Parcial com Forma Característica Não-Negativa*. A função  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$  é definida no ponto  $x$  por

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})(x) = \sum_{i=1}^d b_i(x) \mathbf{n}_i(x),$$

onde  $\mathbf{n}(x) = n_i(x)_{i=1}^d$  denotamos o vetor normal unitário exterior a  $\Gamma$  em  $x \in \Gamma$ .

Definimos também os seguintes tipos de fronteira:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \mathbf{n}(x)^T \mathbf{a}(x) \mathbf{n}(x) > 0\},$$

$$\Gamma_- = \{x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 : \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\},$$

$$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 : \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\}.$$

Se  $\Gamma_0$  é não vazio, então  $\Gamma_0$  será a união de dois subconjuntos disjuntos  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$ , com  $\Gamma_D$  não vazio e aberto relativamente a  $\Gamma$ . Com as fronteiras definidas dessa forma podemos complementar a equação (1) com as condições de fronteira

$$\begin{aligned} u &= g_D \text{ em } \Gamma_D \cup \Gamma_-, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \nabla u) &= g_N \text{ em } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (2)$$

Adotaremos ainda as hipóteses de que  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \geq 0$  em  $\Gamma_N$  e que vale a hipótese de positividade: existe  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tal que

$$c(x) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}(x) + \mathbf{b}(x) \cdot \xi > 0 \text{ q.s. } x \in \Omega. \quad (3)$$

Para simplificar a apresentação do método, assumimos que (3) vale com  $\xi \equiv \mathbf{0}$  e com base nesta hipótese, definimos a função positiva  $c_0$  como segue:

$$(c_0(x))^2 = c(x) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}(x) \text{ q.s. } x \in \Omega. \quad (4)$$

Para ver que o problema (1), (2), está bem posto, no caso de condições de fronteira homogêneas, veja [3].

Consideramos  $\tau_h = \{\Omega_i\}$  uma malha regular, que particiona o domínio  $\Omega$ , em elementos  $\Omega_i$ , abertos, com possíveis nós suspensos. Nó suspenso é como denominamos o vértice de um elemento quando ele pertence a uma face de um elemento vizinho, por exemplo o vértice A na Figura 1.

Por  $h$  denotamos a função dependente da malha, constante por partes, definida por  $h(x) \equiv h_i = \text{diam}(\Omega_i)$  quando  $x \in \Omega_i$ .

Assumimos que cada  $\Omega_i \in \tau_h$  é a imagem por uma função bijetiva suave de um elemento de referência fixo  $\widehat{\Omega}$ . Ou seja,  $\Omega_i = F_i(\widehat{\Omega}) \forall \Omega_i \in \tau_h$ , em que  $\widehat{\Omega}$  é ou um aberto unitário simplex

$$\widehat{\Omega}_s = \{\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d) \in \mathbb{R}^d :$$

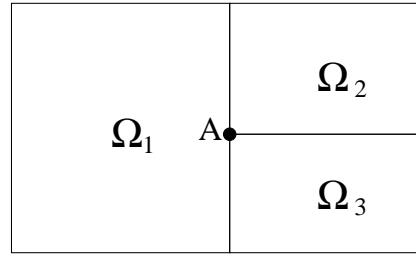


Figura 1: Nó Suspenso

$$0 < \widehat{x}_1 + \dots + \widehat{x}_d < 1, \widehat{x}_i > 0, i = 1, \dots, d\}$$

ou um hipercubo aberto

$$\widehat{\Omega}_c = (-1, 1)^d \in \mathbb{R}^d.$$

Sobre  $\widehat{\Omega}$  definimos os espaços dos polinômios de grau  $p \geq 1$ . Se  $\widehat{\Omega}$  for um hipercubo o espaço dos polinômios será definido como

$$\zeta_p = \text{span}\{\widehat{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq p, 1 \leq i \leq d\},$$

se o elemento mestre for um simplex, o espaço dos polinômios será

$$\mathcal{P}_p = \text{span}\{\widehat{x}^\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq p\}.$$

Para cada elemento  $\Omega_i \in \tau_h$ , denotamos por  $p_i$  o grau de interpolação no elemento, observamos que  $p_i$  é um inteiro e maior que 1. Agrupando os  $p_i$  e  $F_i$  nos vetores  $\mathbf{p} = \{p_i : \Omega_i \in \tau_h\}$  e  $\mathbf{F} = \{F_i : \Omega_i \in \tau_h\}$ , respectivamente, podemos introduzir o espaço dos elementos finitos como

$$\begin{aligned} \mathbf{SP}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}) &= \{u \in L_2(\Omega) : u|_{\Omega_i} \circ F_i \in \\ &\zeta_{p_i} \text{ se } F_i^{-1}(\Omega_i) = \widehat{\Omega}_c \end{aligned}$$

ou  $u|_{\Omega_i} \circ F_i \in \mathcal{P}_{p_i}$  se  $F_i^{-1}(\Omega_i) = \widehat{\Omega}_s ; \Omega_i \in \tau_h\}$ .

Associado com a partição  $\tau_h$ , introduzimos o espaço particionado de Sobolev de ordem composta  $\mathbf{s}$  definido por

$$\begin{aligned} H^{\mathbf{s}}(\Omega, \tau_h) &= \{u \in L_2(\Omega) : u|_{\Omega_i} \in \\ &H^{s_i}(\Omega_i) \forall \Omega_i \in \tau_h\}. \end{aligned}$$

O espaço particionado de Sobolev de ordem composta  $\mathbf{s}$ , está equipado com a norma particionada de Sobolev e correspondente seminorma, respectivamente dadas por

$$\|u\|_{\mathbf{s}, \tau_h} = \left( \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \|u\|_{H^{s_i}}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|u|_{\mathbf{s}, \tau_h} = \left( \sum_{\Omega_i \in \tau_h} |u|_{H^{s_i}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se  $u \in H^1(\Omega, \tau_h)$  definimos o gradiente particionado de  $u$  por

$$(\nabla_{\tau_h} u)|_{\Omega_i} = \nabla(u|_{\Omega_i}), \quad \Omega_i \in \tau_h.$$

Uma face interior de  $\tau_h$  é definida como o interior  $(n-1)$ -dimensional de  $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ , em que,  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  são dois elementos adjacentes de  $\tau_h$ , não necessariamente condizentes. Dois elementos são ditos condizentes quando a intersecção de suas fronteiras é uma aresta ou uma face inteira para cada um dos elementos. Na figura (2), temos exemplos de elementos condizentes e não-condizentes.

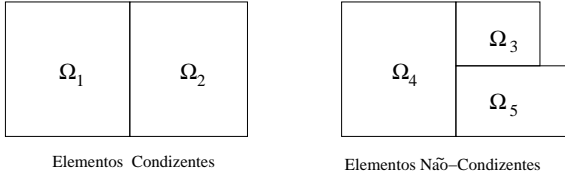


Figura 2: Exemplos de elementos condizentes e não-condizentes.

Uma face de fronteira de  $\tau_h$  é definida como o interior não-vazio e  $(d-1)$ -dimensional de  $\partial\Omega_i \cap \Gamma$ , em que  $\Omega_i$  é um elemento de  $\tau_h$ .

Definimos  $\Gamma_{int}$  como a união de todas as faces interiores de  $\tau_h$ . Dada uma face  $\gamma \subset \Gamma_{int}$ , formada por dois elementos  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ , tais que os índices  $i$  e  $j$  satisfazem  $i > j$ , por  $\mathbf{n}_\gamma$  denotaremos o vetor unitário e normal a  $\gamma$  de  $\Omega_i$  para  $\Omega_j$ , portanto dependente da numeração dos elementos na partição. Nas faces de fronteira, o vetor  $\mathbf{n}_\gamma$  aponta para fora do elemento e substituiremos a notação  $\mathbf{n}_\gamma$  por  $\mathbf{n}$  apenas. Além disso, para  $v \in H^1(\Omega, \tau_h)$  definimos o salto de  $v$  sobre  $\gamma$  e o valor médio de  $v$  em  $\gamma$ , respectivamente, por

$$[v] = v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma} - v|_{\partial\Omega_j \cap \gamma} \quad \text{e} \quad \langle v \rangle = \frac{1}{2}(v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma} + v|_{\partial\Omega_j \cap \gamma}).$$

Seja  $\gamma$  uma face de fronteira. Definimos o salto e a média em  $\gamma$  como:

$$[v] = v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma} \quad \text{e} \quad \langle v \rangle = v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma}.$$

Agora vamos estabelecer a notação para o traço. Dada uma função  $v \in H^1(\Omega, \tau_h)$  e um elemento  $\Omega_i \in \tau_h$ , denotaremos por  $v_i^+$  o traço interior de  $v$  em  $\partial\Omega_i$  e de forma análoga denotaremos por  $v_i^-$  o traço exterior  $v$  em  $\partial\Omega_i \setminus \Gamma$ . O sub-índice  $i$  será omitido quando não houver risco de ambiguidade.

## 2 Versão hp do Método de Galerkin Descontínuo

Seja  $\Omega_i$  um elemento da partição  $\tau_h$ , denotamos por  $\partial\Omega_i$  a união das faces  $(d-1)$ -dimensionais abertas de  $\Omega_i$ . Se  $x \in \partial\Omega_i$ , definimos a função  $\mathbf{n}_i(x)$  como o vetor unitário normal exterior a  $\partial\Omega_i$  em  $x$ . Definimos o fluxo interior e o fluxo exterior das partes de  $\partial\Omega_i$ , respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \partial_- \Omega_i &= \{x \in \partial\Omega_i; \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\} \text{ e} \\ \partial_+ \Omega_i &= \{x \in \partial\Omega_i; \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Vamos supor que as entradas da matriz  $\mathbf{a}$  são constantes em cada elemento  $\Omega_i \in \tau_h$ . Isto é,

$$\mathbf{a} \in [S^0(\Omega, \tau_h, F)]_{sym}^{d \times d}.$$

A aproximação hp-DGFEM-SIP de (1), (2) é definida como segue:

Encontrar  $u_{DG}$  em  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$  tal que

$$B_{DG}(u_{DG}, v) = l_{DG}(v), \quad (5)$$

para qualquer  $v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, F)$ .

A forma bilinear  $B_{DG}(\cdot, \cdot)$  é definida por:

$$\begin{aligned} B_{DG}(u, v) &= B_a(u, v) + B_b(u, v) \\ &\quad - B_\gamma(v, u) - B_\gamma(u, v) + B_\sigma(u, v), \end{aligned}$$

sendo

$$B_a(u, v) = \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \int_{\Omega_i} \mathbf{a} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

$$\begin{aligned} B_b(u, v) &= \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \left\{ - \int_{\Omega_i} (u \mathbf{b} \cdot \nabla v - cuv) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial_+ \Omega_i} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) u^+ v^+ ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial_- \Omega_i \setminus \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) u^- v^+ ds \right\}, \end{aligned}$$

$$B_\gamma(u, v) = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (\mathbf{a} \nabla u) \cdot \mathbf{n}_\gamma \rangle [v] ds,$$

$$B_\sigma(u, v) = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u] [v] ds,$$

e o funcional linear  $l_{DG}(\cdot)$  é dado por

$$\begin{aligned} l_{DG} = & \sum_{\Omega_i \in \tau} \left( \int_{\Omega_i} f v dx \right. \\ & - \int_{\partial_{-\Omega_i} \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) g_D v^+ \\ & - \int_{\partial_{\Omega_i} \cap \Gamma_D} g_D ((\mathbf{a} \nabla v^+) \cdot \mathbf{n}_i) ds + \int_{\partial_{\Omega_i} \cap \Gamma_N} g_N v^+ ds \\ & \left. + \int_{\partial_{\Omega_i} \cap \Gamma} \sigma g_D v^+ ds \right). \end{aligned}$$

O parâmetro  $\sigma$  é chamado de parâmetro de penalização descontínuo e é definido por

$$\sigma|_{\gamma} = C_{\sigma} \frac{\langle \bar{\mathbf{a}} p^2 \rangle}{\langle h \rangle} \text{ para } \gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D, \quad (6)$$

com  $C_{\sigma}$  uma constante positiva, conforme apresentada em [3]. As arestas  $\gamma \subset (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)$  com  $\sigma|_{\gamma} = 0$  são omitidas das integrais que aparecem na definição de  $B_{\sigma}(u, v)$  e  $l_{DG}(v)$ .

Como se sabe da teoria de elementos finitos a coercividade da forma bilinear garante a estabilidade do método de elementos finitos.

Portanto, antes de analisar o erro do método de Galerkin Descontínuo (11), vamos obter alguns resultados preliminares referentes a coercividade da forma bilinear. Introduzimos a norma DG,  $\| \cdot \|_{DG}$  como:

$$\|u\|_{DG}^2 = \sum_{\Omega_i \in \tau_h} (\|\sqrt{a} \nabla u\|_{L_2(\Omega_i)}^2 + \|c_0 u\|_{L_2(\Omega_i)}^2 +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u^+\|_{\partial_{-\Omega_i} \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)}^2 + \frac{1}{2} \|u^+ - u^-\|_{\partial_{-\Omega_i} \setminus \Gamma}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|u^+\|_{\partial_{+\Omega_i} \cap \Gamma}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u]^2 ds \\ & + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (a \nabla u) \cdot \mathbf{n}_{\gamma} \rangle^2 ds \end{aligned}$$

em que  $\|\cdot\|_{\gamma}$ ,  $\gamma \subset \partial\Omega_i$ , denota a (semi)norma associada com o (semi) produto interno

$$(v, u)_{\gamma} = \int_{\gamma} |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i| v u ds,$$

e  $c_0$  está definida como em (4).

Com essa notação, agora nos munimos do seguinte resultado de coercividade para a forma bilinear  $B_{DG}(\cdot, \cdot)$  sobre  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}) \times S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ .

**Teorema 1** Com  $\sigma$  definido como em (6), existe uma constante positiva  $C$ , a qual depende apenas da dimensão  $d$  e da regularidade da forma de  $\tau_h$ , tal que

$$B_{DG}(v, v) \geq C \|v\|_{DG}^2 \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}),$$

desde que a constante  $C_{\sigma}$ , que surge na definição do parâmetro de penalização descontínuo  $\sigma$ , seja escolhida tal que  $C_{\sigma} > C'_{\sigma}$ ,  $C'_{\sigma}$  é uma constante positiva suficientemente grande.

Para a demonstração desse teorema veja [2].

O teorema (1) indica que o esquema DGFEM-SIP é coercivo apenas se  $C_{\sigma}$  é escolhido suficientemente grande.

Se assumimos que a solução  $u$  para o problema de valor de fronteira (1), (2) é suficientemente lisa, isto é  $u \in H^2(\Omega, \tau_h)$  e as funções  $u$  e  $(a \nabla u) \cdot \mathbf{n}_e$  são contínuas através de cada face  $e \subset \partial\Omega_i \setminus \Gamma$  que intersecta o subdomínio de elipticidade,  $\Omega_0 = \{x \in \bar{\Omega} : \xi^T \mathbf{a}(x) \xi > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d\}$ . Se a suavidade solicitada é violada, o método de discretização tem que ser modificado conforme [2]. Sob estas hipóteses, o método é consistente com o problema considerado e a propriedade de ortogonalidade de Galerkin é verdadeira, ou seja,

$$B_{DG}(u - u_{DG}, v) = 0 \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}). \quad (7)$$

Será assumido na análise precedente, que o vetor velocidade  $\mathbf{b}$  satisfaz

$$\mathbf{b} \cdot \nabla_{\tau_h} v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}), \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}). \quad (8)$$

Um exemplo de vetor que satisfaz (8) é a função interpolante polinomial por partes do vetor  $\mathbf{b}$ .

Para assegurar que as curvas características do operador advectivo estejam corretamente definidas, iremos assumir que  $\mathbf{b} \in [W_{\infty}^1(\Omega)]^d$ .

Denotamos por  $\Pi_p$  o projetor ortogonal de  $L_2(\Omega)$  sobre o espaço de elementos finitos  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ , isto é, dado  $u \in L_2(\Omega)$ , definimos  $\Pi_p u$  por

$$(u - \Pi_p u, v) = 0, \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}),$$

em que  $(\cdot, \cdot)$  denota o produto interno de  $L_2(\Omega)$ .

Note que (8) implica

$$(u - \Pi_p u, \mathbf{b} \cdot \nabla_{\tau_h} v) = 0,$$

para qualquer  $v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ , conforme as provas do lema e do teorema seguintes.

Vamos decompor o erro global  $u - u_{DG}$  como

$$u - u_{DG} = (u - \Pi_p u) + (\Pi_p u - u_{DG}) \equiv \eta + \xi. \quad (9)$$

Com esta definição podemos enunciar o seguinte lema,

**Lema 1** *Assuma que (3) e (8) valem e que  $\beta_1|_k = \|c/(c_0)^2\|_{L^\infty(\Omega_k)}$ . Então as funções  $\xi$  e  $\eta$  definidas em (9) satisfazem a seguinte desigualdade*

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{DG}^2 &\leq C \left( \sum_{\Omega_k \in \tau_h} (\|\sqrt{a}\eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 \right. \\ &+ \beta_1^2 \|c_0\eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \|\eta^+\|_{\partial_+\Omega_k \cap \Gamma}^2 + \|\eta^-\|_{\partial_-\Omega_k \cap \Gamma}^2 \\ &\left. + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (a\nabla\eta) \cdot \mathbf{n}_\gamma \rangle^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[\eta]^2 ds \right) \end{aligned}$$

sendo  $C$  é uma constante que depende apenas da dimensão  $d$  e da constante de regularidade de  $\tau_h$ .

Para a demonstração desse lema veja [1].

### 3 Análise de Erro *a posteriori*

Com base na teoria apresentada em [2], começamos a análise considerando o seguinte problema dual ou adjunto:

Encontrar  $w \in H^2(\Omega, \tau_h)$  tal que

$$B_{DG}(v, w) = J(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \tau_h). \quad (10)$$

A existência e unicidade da solução de (10) depende do funcional  $J(\cdot)$ . Vamos assumir que este funcional é escolhido tal que (10) tenha única solução.

Nesta seção desejamos obter uma estimativa para o funcional  $J(u)$ . Além disso desejamos construir um espaço de aproximação tal que o erro dessa estimativa seja menor que uma tolerância predeterminada e que o número de graus de liberdade do espaço de aproximação construído seja minimizado.

A aproximação hp-DGFEM-SIP de (10) é definida como segue:

Encontrar  $w_{DG}$  em  $S^p(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$  tal que

$$B_{DG}(v, w_{DG}) = l_{DG}(v), \quad (11)$$

para qualquer  $v \in S^p(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ .

Com isso apresentamos o resultado fundamental do estimador que vamos propor.

**Teorema 2** *Se  $u$  e  $u_{DG}$  denotam as soluções de (1), (2) e (11), respectivamente, e supondo que a solução dual  $w$  esteja definida por (10), então*

$$J(u) - J(u_{DG}) = B(u - u_{DG}, w - w_{DG})$$

**Prova 1** *Escolhendo  $v = u - u_{DG}$  em (10), lembrando da linearidade de  $J(\cdot)$  e da propriedade de ortogonalidade de Galerkin (7), deduzimos que*

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_{DG}) &= J(u - u_{DG}) \quad (12) \\ &= B_{DG}(u - u_{DG}, w) \\ &= B_{DG}(u - u_{DG}, w - w_{hp}) \end{aligned}$$

Em [2] foi apresentado um estimador de erro com base nos resíduos da solução do problema primal, mas para sua implementação exige a resolução de três problemas, um problema primal e um problema dual em um espaço e um problema dual novamente mas em um espaço enriquecido com relação ao espaço das duas aproximações anteriores. Esta aproximação enriquecida do problema dual substitua a aproximação do problema dual. O estimador que propomos segue do teorema 2 usando aproximações primal e dual em espaços enriquecidos ao invés de  $u$  e  $w$  no lado direito de 12. Se denotamos  $e = u_{DG+} - u_{DG}$  e  $\varepsilon = w_{DG+} - w_{DG}$ , temos

$$J(e) \approx B_{DG}(e, \varepsilon) = \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \eta_i$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_i &= \int_{\Omega_i} \mathbf{a} \nabla e \cdot \nabla \varepsilon dx - \int_{\Omega_i} e \mathbf{b} \cdot \nabla \varepsilon dx \\ &\quad + \int_{\Omega_i} c e \varepsilon dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)} \langle (\mathbf{a} \nabla e) \cdot \mathbf{n}_\gamma \rangle [\varepsilon] ds, \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)} \langle (\mathbf{a} \nabla \varepsilon) \cdot \mathbf{n}_\gamma \rangle [e] ds, \\ &\quad + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [e][\varepsilon] ds, + \frac{1}{2} \int_{\partial_-\Omega_i \cap \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) e^- \varepsilon^+ \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial_+\Omega_i \cap \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) e^+ \varepsilon^+ \quad (13) \end{aligned}$$

Esse estimador pode ser implementado reutilizando a implementação da forma bilinear

$B_{DG}$ . A extensão desse estimador a outras formulações simétricas é simples, mesmo para outras equações.

A estratégia de adaptação que utilizaremos será a seguinte:

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo Adaptativo

---

**Entrada:**  $TOL$ , tolerância ao erro da aproximação de  $J$ .

$\Phi$ , percentual de elementos refinados a cada iteração.

$\mathbf{p}_{inc}$ , graus de incremento do espaço enriquecido  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ .

$\tau_h$ , partição inicial.  $\mathbf{p}$ , graus de interpolação inicial.

**Saída:**  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$  e  $J(u_{DG})$ .

- 1 Resolver os problemas primais e duais no espaço  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$  e  $S^{\mathbf{P}+\mathbf{P}_{inc}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$  (4 aproximações).
- 2 Calcular o estimador de erro  $\eta_i$  como apresentado em (13), porém com  $w$  substituído por  $\hat{w}$ , em cada elemento.
- 3 Verificar o critério de parada:

$$\hat{\varepsilon}_{|\Omega|} \equiv \varepsilon_{|\Omega|}(u_{DG}, h, p, \hat{w} - w_{hp}) \leq TOL.$$

- 4 Caso o critério de parada não seja satisfeito, refinar os  $\Phi\%$  elementos que têm os maiores estimadores de erro, definindo uma nova partição  $\tau_h$  (h-refinamento), e volta ao passo 2.
- 

## 4 Experimentos Numéricos

Consideramos a equação

$$-\Delta u = f$$

com  $f$  tal que  $u(x, y) = x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2$ . Para este  $u$  obviamente as condições de contorno são de Dirichlet e homogêneas. O funcional de interesse é  $J(u) = \int_{\Omega} \Psi v$ , com  $\Psi = \Delta w$  e  $w(x, y) = x(x-1)y(y-1)e^{10x^2+10y^2}$ . Este funcional representa uma média ponderada da aproximação primal sobre o domínio. Esta ponderação prioriza o valor da solução próximo a (1,1). A consistência dual para funcionais dessa forma foi apresentada em [2]. Além disso sabemos  $w$  será a solução do problema dual. As curvas de nível de  $w$  são apresentados na figura 4.

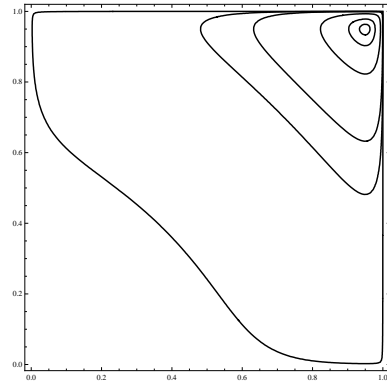


Figura 3: Solução Dual

Devido as regiões de grandes gradientes de  $\Psi$ ,  $J$  é um funcional de difícil avaliação. No processo adaptativo que propomos, faremos apenas h-refinamento como forma de adaptar o espaço de aproximação. A ordem de aproximação dos espaços serão mantidas constantes como 2 e 3, neste exemplo. O resultado da adaptação do espaço usando o estimador proposto, depois de 22 iterações e refinando 20 por cento dos elementos com maiores erros estimados, é apresentado na figura 4.

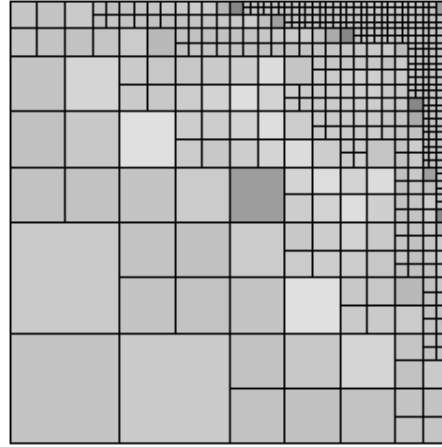


Figura 4: Resultado da Adaptação.

Sem uma estimativa que leve em conta o problema dual não seríamos capazes de prever as regiões que mais contribuem na avaliação do funcional. Comparando os resultados na aproximação de  $J(u)$  obtida com os passos do processo adaptativo, com os resultados do refinamento uniforme apresentados na figura 5, comprovamos a eficiência do processo de adaptação.

A eficiência da estimativa de erro pode ser quantificada pelo índice de efetividade da estimativa, o qual é definido como a razão entre

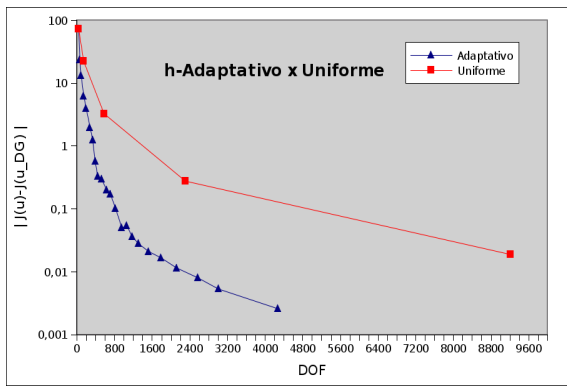


Figura 5: Erro no Funcional.

a estimativa e o erro verdadeiro do funcional, isto é,

$$IE = \frac{|\sum_i \eta_i|}{|J(u) - J(u_{DG})|}.$$

Os índices de efetividade desse exemplo são apresentados na figura 4. Podemos ver que o índice de efetividade se aproxima assintoticamente a 1, o que indica que o estimador do erro do funcional aproxima-se do erro do funcional da solução exata.

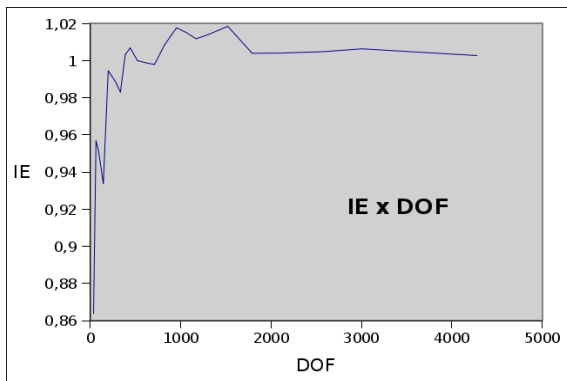


Figura 6: Índice de Efetividade.

O sistema algébrico obtido pelo método de Galerkin descontínuo é muito mal condicionado, sendo necessário o uso de métodos iterativos para sua resolução de forma adequada. Neste exemplo usamos o método GMRES.

## 5 Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma versão hp do método de Galerkin descontínuo conforme [2]. Para este método apresentamos uma estratégia de adaptação automática para o espaço de aproximação usado no método de Galerkin descontínuo, sendo que o objetivo da adaptação é

obter uma solução que satisfaça a aproximação de um funcional com uma tolerância predeterminada, com o menor número de graus de liberdade possível. Aplicamos essa estratégia para problemas elípticos e comprovamos que tanto a estimação do erro no funcional, quantificada pelo índice de efetividade, quanto o processo de adaptação foram muito eficazes.

Devido a generalidade a estratégia apresentada esperamos que ela possa ser estendida a uma estratégia hp-adaptativa, a avaliação de outros funcionais e também aplicada a outras formulações.

## 6 Agradecimentos

João Luis Gonçalves agradece a FAPESP pelo suporte através do processo 2007/00072-0. Philippe R. B. Devloo, Igor Mozolevski e Sônia M. Gomes agradecem ao CNPq pelo suporte.

## Referências

- [1] J.L. Gonçalves, Estimativas de Erro de Aproximação de Funcionais das Soluções para Equações de Difusão-Advecção-Reação, Dissertação de Mestrado, UFSC, 2007.
- [2] K. Harriman, P. Houston, B. Senior, E. Süli, hp-Version Discontinuous Galerkin Methods with Interior Penalty for Partial Differential Equations with Nonnegative Characteristic Form. *C.-W. Shu, T. Tang, and S.-Y. Cheng, editors, Recent Advances in Scientific Computing and Partial Differential Equations*. Contemporary Mathematics, 330 (2003), 89-19.
- [3] P. Houston, C. Schwab, E. Süli, Discontinuous hp-finite element method for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM Journal Numer. Anal.*, 39(6),(2002), 2133-2163.
- [4] J.T. Oden, S. Prudhomme, Goal-Oriented Error Estimation and Adaptivity for the Finite Element Method, *Computers and Mathematics with Applications*, 41 (2001) 735-756.