

# Simulações Numéricas do Colapso Gravitacional de um Campo Escalar Sem Massa

Raphael de O. Garcia,      Samuel R. de Oliveira ,

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp,  
13083-859, Campinas, SP

E-mail: gubim@ime.unicamp.br,    samuel@ime.unicamp.br

Este trabalho trata de um problema de colapso gravitacional do campo escalar sem massa com simetria esférica, de acordo com as equações de Einstein com acoplamento mínimo.

Desenvolvemos algoritmos simples mas com ajuste automático de refinamento para obter soluções numéricas. O refinamento é necessário para descrever os fenômenos do colapso. Utilizamos rotinas comuns para resolver equações diferenciais ordinárias advindas do método das linhas aplicado às equações diferenciais parciais do modelo matemático, a saber, rotinas de Runge-Kutta e de splines cúbicas.

E por fim mostramos que é possível obter soluções tão próximas, o quanto se queira, da solução de Buracos Negros e da solução crítica com os algoritmos desenvolvidos e simples computadores de mesa.

## 1. As Equações do Campo

Consideramos o colapso gravitacional de um campo escalar sem massa minimamente acoplado. O tensor energia-momentum é

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla_c \phi \nabla^c \phi \quad (1)$$

e a equação da matéria é

$$\nabla_a \nabla^a \phi = 0. \quad (2)$$

Para a simetria esférica utilizamos o sistema de coordenadas radial-polar, que é uma generalização do usual sistema de coordenadas de Schwarzschild para o caso dependente do tempo, cujo elemento de linha é definido por

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t) dt^2 + a^2(r, t) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3)$$

onde  $\alpha$  é uma função lapso temporal,  $a$  é uma

função de escala radial, que serão denominadas apenas por funções lapso e radial respectivamente e  $d\Omega^2$  é a métrica na superfície de uma esfera unitária, ou seja,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ .

As equações de Einstein,

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (4)$$

com a métrica (3), o tensor (1) e os campos auxiliares  $\Phi \equiv \dot{\phi}$  e  $\Pi \equiv \frac{a}{\alpha} \dot{\phi}$ , são as seguintes:

$$\dot{\Phi} = \left( \frac{\alpha}{a} \Pi \right)'; \quad (5)$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{\alpha}{a} \Phi \right)'; \quad (6)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} + \frac{1-a^2}{r} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2-1}{2r} - 2\pi r (\Pi^2 + \Phi^2) = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} - 4\pi r \Phi \Pi = 0 \quad (9)$$

em que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r, t) = \alpha_0,$$

onde  $\alpha_0$  é uma constante escolhida convenientemente. Tomamos  $\alpha_0 = 1$ .

A equação (9) é satisfeita automaticamente, se as equações (7) e (8) o forem.

Para que o espaço-tempo seja regular na origem, a seguinte condição de contorno é necessária:

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r, t) = 1.$$

Estudar a evolução temporal desse campo escalar é resolver o sistema de equações, formado por (5), (6), (7) e (8).

## 2 . Fenomenologia e algumas características

Um importante diagnóstico geométrico é a massa de Hawking  $m$  ou função perfil da massa, [4]. Em sistemas com simetria esférica, a massa de Hawking é representada por

$$1 - \frac{2m(r,t)}{r} = a^{-2}. \quad (10)$$

Através da equação (10) define-se a massa total do espaço-tempo. O resultado de

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r,t)$$

é a *massa total do espaço-tempo*, também denominada por *massa de Arnowitt, Desner e Misner* ou simplesmente massa **ADM**. Se  $r \rightarrow 2m$ , então tem-se a formação de buraco negro.

Em 1986, Christodoulou [2] provou que, se os dados iniciais do campo escalar com simetria esférica forem bem definidos, suficientemente fracos e diferenciáveis, a evolução temporal resultará numa dispersão do campo escalar, ou seja, o espaço-tempo resultante é o de Minkowski. Por outro lado, se os dados forem bem definidos, suficientemente fortes e diferenciáveis, a evolução desse campo escalar resultará na formação de um buraco negro, ou seja, uma curvatura infinita no espaço-tempo aparecerá.

Através de simulações numéricas, Choptuik estudou o colapso de um campo escalar sem massa, com simetria esférica. Em 1993, Choptuik [1] apresentou diversos resultados focalizando famílias de soluções  $S$ , dependentes de um parâmetro arbitrário  $p$ , isto é  $S[p]$ , com as seguintes propriedades:

1. cada campo escalar é representado pelo parâmetro  $p$ , que caracteriza uma medida da intensidade da auto-interação gravitacional;
2. cada família contém todos os campos com um mesmo perfil;
3. existe um parâmetro  $p_{fraco}$  tal que, para  $p < p_{fraco}$  o espaço-tempo é assintoticamente plano;
4. existe um parâmetro  $p_{forte}$  tal que, para  $p > p_{forte}$  o estágio final é a formação de buraco negro;

5. existe um parâmetro crítico  $p_*$ , que separa as soluções que caracterizam a formação ou não de buraco negro.

Os resultados de Christodoulou (1986) [2] garantem a existência dos parâmetros  $p_{fraco}$  e  $p_{forte}$ .

Choptuik (1993) [1], assumiu que  $p_{fraco} < p_* < p_{forte}$  e referiu-se a  $S[p < p_*]$  e  $S[p > p_*]$  como soluções subcríticas e supercríticas, respectivamente. Assim, dada uma família  $S[p]$ , que possui soluções, tanto subcríticas quanto supercríticas, fixam-se duas soluções, uma subcrítica e a outra supercrítica. Pode-se determinar o parâmetro  $p_*$  utilizando, por exemplo, o método da Bissecção. Como consequência, Choptuik determinou o parâmetro crítico  $p_*$ , que estabelece a transição entre soluções  $S[p < p_*]$  e  $S[p > p_*]$ , e, no parâmetro crítico, tem-se a formação do buraco negro limite.

Intuitivamente, podemos associar duas escalas de medidas do campo gravitacional, a extensão radial  $L$  do pulso e o raio gravitacional de Schwarzschild,  $R_s$ ,

$$R_s = 2M_\infty = 2 \lim_{r \rightarrow \infty} m(r,t). \quad (11)$$

Quando  $L \gg R_s$  temos o perfil de um campo fraco: o pacote de onda deslocará na direção de  $r = 0$ , implodirá em  $r = 0$ , ocorrerá auto-reflexão e dissipará para o infinito, resultando no espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, quando  $L \gtrsim R_s$  temos o perfil do campo forte e, nesse caso, o campo possuirá auto-gravitação e a formação de buraco negro é possível. Em coordenadas polar-radial, o campo forte pode ser diagnosticado pela quantidade

$$\frac{2m(r,t)}{r} \cong 1. \quad (12)$$

## 3. Métodos Numéricos

Para a solução numérica das equações diferenciais utilizamos o método de linhas adaptativo com refinamento [6]. A seguir descrevemos os procedimentos efetuados.

1. Determinar as condições iniciais para a evolução temporal
2. Evolução temporal
  - (a) Obter o tamanho do passo temporal

- (b) Efetuar a evolução temporal dos campos auxiliares

### 3. Preparar as novas condições iniciais.

No primeiro passo precisamos resolver as equações diferenciais ordinárias (7) e (8),

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} + \frac{1-a^2}{r} = 0,$$

onde  $\Phi(r, t_i) = \Phi_0(r)$  e  $\Pi(r, t_i) = \Pi_0(r)$ , e

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2-1}{2r} - 2\pi r (\Pi^2 + \Phi^2) = 0,$$

para encontrar os coeficientes  $\alpha$  e  $a$  da métrica definida pela equação (3). Para isso, utilizamos o método *Runge-Kutta de quarta ordem* adaptativo, com refinamento, para resolver as equações.

Para o código fonte elaborado no MatLab, existe a subrotina *ode45* para resolver equações diferenciais ordinárias pelo método de Runge-Kutta explícito de quarta ordem. Essa subrotina é um algoritmo adaptativo de refinamento e mantém a malha regular, Hanselman e Littlefield (2003) [5].

Nesse passo é necessário fazer uma interpolação para conhecer os valores dos campos auxiliares  $\Phi$  e  $\Pi$ , nos pontos exigidos pela malha adaptativa, com refinamento e regularidade do método Runge-Kutta. Utilizamos a subrotina *spline* do MatLab, para fazer a interpolação por *spline cúbica*.

Após o primeiro passo, conhecemos os coeficientes da métrica nos pontos da malha espacial determinados pela solução encontrada através do método Runge-Kutta. Consequentemente, sabemos os espaçamentos  $\Delta r_i$ , entre os pontos da malha espacial.

Agora temos condições de iniciar o segundo passo, pois podemos encontrar um tamanho para o passo temporal que mantém o algoritmo estável. Na parte (a) do segundo passo, optamos por estabelecer o passo temporal da seguinte maneira:

$$\Delta t = 0,8 \min_i \left\{ \frac{\Delta r_i}{X_i} \right\} \quad (13)$$

onde  $X_i$  é a área abaixo da função  $a^2$ , delimitada pelas retas  $y = x_i$ ,  $y = x_{i+1}$  e  $y = 0$ .

A parte (b) do segundo passo consiste em resolver as duas equações diferenciais parciais,

equações (5) e (6),

$$\dot{\Phi} = \left( \frac{\alpha}{a} \Pi \right)'$$

e

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{\alpha}{a} \Phi \right)',$$

onde  $\Phi(r, t_i) = \Phi_0(r)$ ,  $\Pi(r, t_i) = \Pi_0(r)$ ,  $a(r, t_i) = a_0(r)$  e  $\alpha(r, t_i) = \alpha_0(r)$ , que aparece nas equações do campo. Utilizamos o método Runge-Kutta de quarta ordem para fazer a evolução temporal dos campos auxiliares  $\Phi$  e  $\Pi$ , no intervalo  $[t_i, t_f]$ , onde  $t_f = t_i + \Delta t$ .

Nesse passo a mesma subrotina do MatLab é utilizada, a subrotina *ode45*, para fazer a evolução temporal dos campos auxiliares até o tempo  $t_f$  e encontrar  $\Phi(r, t_f)$  e  $\Pi(r, t_f)$ .

Se estivermos interessados em continuar a evolução temporal, temos que considerar os novos dados,  $\Phi$ ,  $\Pi$  e  $t_f$ , à serem utilizados.

O terceiro passo refere-se a atualização nos dados das equações diferenciais ordinárias do primeiro passo e das equações diferenciais parciais, da parte (b) do segundo passo. Para isso, basta fazer

$$t_i = t_f, \quad \Phi_0(r) = \Phi(r, t_f) \quad \text{e} \quad \Pi_0(r) = \Pi(r, t_i).$$

Feitas as atualizações, para prosseguir com a evolução temporal basta considerar um laço de repetição, dos passos apresentados até um tempo  $t$  conveniente.

A região na qual temos interesse em resolver as equações diferenciais é  $\Omega = [0, r_f] \times [0, \infty)$ , onde o intervalo  $[0, r_f]$  define o tamanho da malha espacial e  $r_f$  é uma constante estabelecida de forma conveniente.

## 4. Condições

Dada uma família de dados iniciais, a evolução temporal desses campos iniciais é determinada pelas equações (5), (6), (7) e (8). Se desejamos, em particular, estudar a evolução temporal de um campo inicial que pertence à família dada, devemos impor a seguinte condição inicial,

$$\phi(r, 0) = \phi(r),$$

nas equações do campo, onde  $\phi(r)$  é o campo inicial dado que desejamos estudar e  $t_i = 0$ .

As equações do campo estão expressas pelos campos auxiliares  $\Phi$  e  $\Pi$ , onde  $\Phi \equiv \phi'$  e  $\Pi \equiv \frac{a}{\alpha} \phi$ . Assim, dado o valor de  $\phi(r, 0)$ , temos as

condições iniciais necessárias para a evolução temporal dos campos auxiliares.

A primeira *condição de contorno* que veremos é para  $r = r_f$ . O ideal seria  $r$  tender ao infinito, mas isso é inviável para a simulação numérica. Assim devemos restringir o domínio espacial em um intervalo finito.

Uma boa escolha para  $r_f$  é fundamental, pois ao estipular um valor para  $r_f$  considera-se que toda a dinâmica dos campos auxiliares está no intervalo espacial  $[0, r_f]$  e que a partir de  $r_f$  temos apenas radiação, ou seja, temos apenas ondas saindo em  $r_f$ .

Essa imposição sobre o domínio espacial cria a necessidade de uma *condição de radiação* em  $r = r_f$ ,

$$\Pi(r_f, t) = -\Phi(r_f, t).$$

Isso é necessário para evitar que a solução seja afetada por  $r = r_f$ , pois nesse ponto não temos ondas se propagando para o interior do intervalo.

A outra *condição de contorno* refere-se a origem  $r = 0$ . Aqui devemos ter um cuidado redobrado, pois não só temos imposições sobre  $\Phi$  e  $\Pi$ , mas também temos que garantir a regularidade da métrica para cada passo temporal, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r, t) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r, t) = 1.$$

A condição de regularidade da métrica é acrescentada no algoritmo através das seguintes igualdades

$$a(0, t) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha(0, t) = 1.$$

Em  $r = 0$ , o campo escalar  $\phi$  deve satisfazer

$$\phi'(0, t) = 0$$

e isso faz com que

$$\Phi(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \Pi'(0, t) = 0.$$

Para encontrar o valor de  $\Pi(0, t)$ , fizemos uma extensão de cinco pontos, com os espaçamentos variados entre eles. Esses pontos incluem  $\Pi(0, t)$  e quatro pontos conhecidos de sua vizinhança.

## 5. Critérios de Parada

A evolução temporal do campo escalar que estamos estudando tem apenas dois estágios finais possíveis: formação de buraco negro e dispersão do campo. Cada um dos estágios finais

possui propriedades que os caracterizam e que podemos utilizar como critério de parada para a evolução temporal.

Se a igualdade  $2m(r, t) = r$  for satisfeita para algum  $(r, t)$ , temos a formação de um buraco negro. Essa igualdade representa uma singularidade na métrica radial-polar, equação (3).

No algoritmo basta apresentar o cálculo da função perfil da massa (massa de Hawking), em cada evolução temporal, através da equação

$$\frac{2m(r, t)}{r} = 1 - \frac{1}{a^2}$$

e verificar se estamos suficientemente próximos da igualdade  $2m = r$ , a ponto de garantir que o estágio final da evolução temporal de um campo escalar inicial é a formação de um buraco negro.

Devido a escolha da métrica e a sua regularidade na origem, não é possível atingir a igualdade  $2m = r$ , porém sempre saberemos que estamos suficientemente próximos da formação de um buraco negro, a ponto de garantir que o estágio final será um buraco negro.

Uma outra quantidade interessante de acompanhar, ao longo de uma evolução temporal, é a massa total conservada na região do espaço-tempo que estamos considerando. A equação é dada por

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{r_f} \frac{dm}{dr} dr \\ &= \int_0^{r_f} 2\pi \left[ \frac{r^2}{a^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{r^2}{\alpha^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

[1].

Para o caso de dispersão do campo temos  $\alpha(r, t) \cong \alpha_0$  e  $a(r, t) \cong a_0$ , para os coeficientes da métrica, onde  $\alpha_0$  e  $a_0$  são constantes. Nesse caso temos como solução um espaço-tempo plano e assim, podemos utilizá-los como critério de parada.

Acrescentando essas condições de contorno e os critérios de parada no código fonte, o algoritmo está pronto para fazer simulações numéricas de um campo escalar dado.

## 6. Simulações

Para realizar as simulações, utilizamos um Pentium IV com 2,8 GHz e 496 MB de memória RAM. O sistema operacional é um LI-

NUX/GNU 2.4.12 e o Software foi o MatLab7 (R14).

Antes de iniciar as simulações, investigamos as rotinas de interpolação e verificamos que há um ganho no tempo de execução, sem que haja perda de precisão, quando utilizamos a *interpolação cúbica de Hermite*, Garcia [3]. Assim, substituímos a *spline cúbica* pela *interpolação cúbica de Hermite* no algoritmo e efetuamos as simulações.

Consideramos uma família de campos escalares iniciais, com o perfil Gaussiano

$$\phi(r, 0) = \phi_0 \cdot \exp\left(-\left(\frac{r-20}{4}\right)^2\right), \quad (14)$$

onde  $\phi_0$  é a amplitude da Gaussiana e também o parâmetro que caracteriza a família de campos iniciais.

Fixamos  $r_f = 48$ , fizemos várias simulações com diferentes valores para  $\phi_0$  e construímos a tabela 1, que mostra o tempo gasto pela evolução temporal para atingir um dos estágios finais possíveis, Garcia [3].

$\phi_0$	tempo em minutos
0,001	05,76
0,002	11,59
0,003	18,14
0,004	25,88
0,005	36,53
0,006	48,99
0,007	66,64
0,008	110,51
0,009	130,43
0,010	170,22
0,0125	788,06
0,020	967,48

Tabela 1: Tempo de evolução temporal dos campos iniciais

Na figura 1, podemos observar que no caso de  $\phi_0 = 0,001$  não temos a formação de buraco negro, temos um exemplo de dispersão do campo. Isto é, uma parte do campo escalar inicial começa a colapsar, enquanto uma outra parte se dispersa e a partir daí, a parte que colapsa implode em  $r = 0$  e depois se dispersa, a medida que o tempo passa.

Além disso, não existem ondas partindo de  $r_f = 48$  e indo em direção de  $r = 0$ . Isso justi-

fica a escolha da condição de radiação

$$\Pi(r_f, t) = -\Phi(r_f, t),$$

pois não desejamos que essas ondas interfiram na solução numérica.

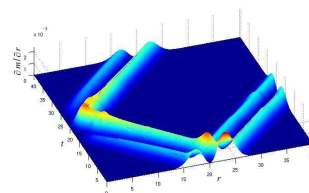


Figura 1: Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para  $\phi_0 = 0,001$ .

Os gráficos da figura 2 ilustram as mudanças no coeficiente radial da métrica e na função perfil da massa.

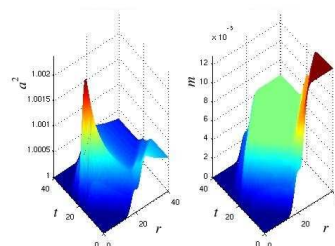


Figura 2: A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita temos a evolução temporal da função perfil da massa.

O campo escalar inicial com amplitude  $\phi_0 = 0,02$  é um campo forte cuja solução está próxima da solução de buraco negro. Nas figuras 3 e 4, pode-se observar que uma parte do campo se dispersa e a outra começa a colapsar até atingir  $2m \cong r$ .

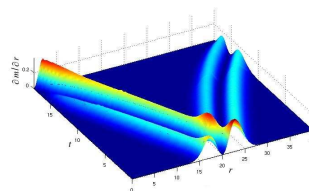


Figura 3: Gráfico da evolução temporal da distribuição de matéria no espaço-tempo, para  $\phi_0 = 0,02$ .

Um outro comportamento característico de simulações que atingem soluções próximas de

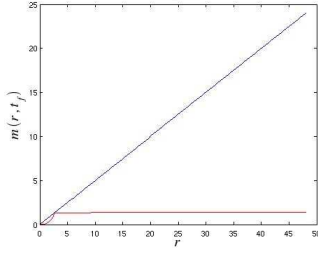


Figura 4: Nesse gráfico estão representados o gráfico da reta  $y = r$  e a função perfil de massa no último tempo atingido pela simulação.

soluções de buraco negro, é o gráfico da função radial da métrica. A figura 5 mostra que temos uma perda de suavidade na função radial representada por um pico no gráfico. Esse comportamento era esperado devido a equação (10).

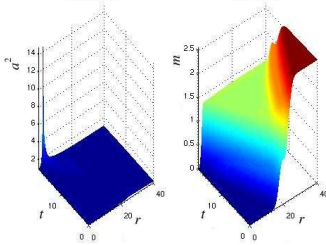


Figura 5: A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita temos a evolução temporal da função perfil da massa.

Na tabela 1, temos as amplitudes dos campos escalares que fizemos simulações. Com campo escalar inicial de amplitude  $\phi_0 = 0,0125$ , obtivemos a solução mais próxima da solução crítica que representa a transição entre  $S[p < p_*]$  e  $S[p > p_*]$ . Assim definimos o parâmetro crítico como sendo aproximadamente  $(\phi_0)_* \cong 0,013$ , Garcia [3]. As figuras 6 e 7 referem-se a essa simulação.

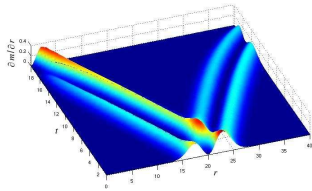


Figura 6: Gráfico da evolução temporal da distribuição de matéria no espaço-tempo, para  $\phi_0 = 0,0125$ .

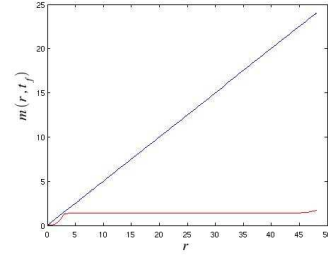


Figura 7: Nesse gráfico estão representados a função perfil da massa, no último tempo atingido pela simulação e o gráfico da reta  $y = r$ .

## 7. Conclusões

O algoritmo desenvolvido foi suficiente para realizar simulações numéricas de campos escalares e obter soluções tão próximas quanto se queira da solução de buracos negros. Também conseguimos uma solução numérica próxima da solução crítica.

Para a família de campos escalares iniciais escolhida, equação (14), obtivemos um valor aproximado para o parâmetro crítico  $(\phi_0)_* \cong 0,013$ .

O Método de Linhas adaptativo, com refinamento e regularizador, foi fundamental para o desempenho das simulações. O ponto crucial do algoritmo é quando o Método Runge-Kutta necessita fazer interpolações para conseguir resolver as equações do campo, as quais estão relacionadas com a obtenção dos coeficientes da métrica.

Uma outra constatação que se fez é que é possível obter essas soluções numéricas utilizando algoritmos desenvolvidos em *MatLab*, para simples computadores de mesa.

## Referências

- [1] M. W. Choptuik, Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field, *Phys. Rev. Lett.*, v. 70, n. 1, p. 9-12, Jan. 1993.
- [2] D. Christodoulou, The problem of a self-gravitating scalar field, *Comm. Math. Phys.*, 105, p. 337-361, 1986.
- [3] R. O. Garcia, “Simulações Numéricas do Colapso Gravitacional de um Campo Escalar Sem Massa”, Tese de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2007.

- [4] C. Gundlach, Critical phenomena in gravitational collapse, *Physics Reports*, 376, p. 339-405, 2003.
- [5] D. Hanselman, B. Littlefield, “MatLab 6 - Curso completo”. Prentice Hall, São Paulo, 2003.
- [6] P. Saucez, A. V. Wouwer, W. E. Schiesser, “Adaptive Method of Lines”. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2001.