

# ANALISE NUMÉRICA DO MÉTODO DE EULER EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS EM FINANÇAS

Julio Cezar Alves Thomaz,

Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, FEUC,

Av. Dias da Silva, 165, 3004-512, Coimbra, Portugal

E-mail: jcthomaz@statistiken.mat.br

**Resumo:** Neste trabalho, apresenta um estudo da modelagem matemática das Equações Diferenciais Estocásticas (EDE), sua solução numérica na aproximação discreta do tempo por diferenças finitas, o estudo de convergência para EDE Geométrica, as principais EDEs usadas para a modelagem de preço de ativos no Mercado Financeiro. Desta forma, o estudo fica concentrado especialmente na apresentações das aproximações numéricas das soluções para EDEs, e também, no estudo de sua convergência para solução analítica no caso do movimento Browniano. Por fim, são feitas simulações de problemas, modeladas por EDEs aplicadas à Finanças.

## 1 Introdução

As EDEs têm aplicação na modelagem de diversos problemas na Economia, em especial a problemas no Mercado Financeiro. Seu papel na modelagem de dinâmica estocástica do tempo contínuo é comparável com as equações diferenciais ordinárias determinísticas (EDO). Em algumas aplicações, como nos preços dos ativos no mercado financeiro que usam o modelo estocástico do Movimento Browniano, a componente determinística na dinâmica é freqüentemente de interesse secundário.

Trabalhos importantes no desenvolvimento da teoria de modelagem estocástica são os de Itô[1], Gikhman[2], Dynkin[3], McKean[4], Skorokhod[5], Arnold[6] e Oksendal[7].

As Equações Diferenciais envolvendo funções aleatórias (processos estocásticos) surgiram na investigação de problema difusivos. Por exemplo, equações do tipo

$$\frac{dX_t}{dt} = A(t)X_t + B(t), \quad X_{t_0} = c.$$

onde os coeficientes  $A(t)$  e  $B(t)$  são funções aleatórias e o valor inicial  $c$  é também um dado aleatório.

A situação é diferente se as “funções” aleatórias são do tipo “Ruído Branco”. Como por exemplo, a “função”  $\xi_t$  na equação

$$\frac{dX_t}{dt} = f(t, X_t) + G(t, X_t) \xi_t, \quad X_{t_0} = c. \quad (1)$$

Este “Ruído Branco” ( $\xi_t$ ) é visto como um processo estocástico Gaussiano estacionário com média zero e densidade espectral constante. Tal processo não existe no sentido convencional, dado que teria que ter a função Delta de Dirac como a função de covariância, portanto uma variação infinita (e os valores independentes em todos os pontos). O “Ruído Branco” ( $\xi_t$ ) é uma idealização matemática muito útil para descrever as influências aleatórias, que flutuam rapidamente e, portanto, são virtualmente não correlacionadas por instantes diferentes de tempo.

Tais equações com ruído branco foram tratada primeiro em 1908 por Langevin[8] no estudo do movimento Browniano de uma partícula em um fluido. A equação Langevin, eq. (2) é um caso especial da eq. (1), é dado por

$$\frac{dX_t}{dt} = -\alpha X_t + \sigma \xi_t, \quad \alpha > 0, \quad \sigma \text{ constante}, \quad (2)$$

No modelo (2) do movimento Browniano, pode calcular explicitamente as distribuições de probabilidade de  $X_t$  mesmo que  $\xi_t$  não sejam uma função aleatória no sentido usual. De fato, cada processo  $X_t$  com estas distribuições têm as funções amostra que, com probabilidade 1, não são diferenciáveis, de modo que (2) e, mais geral, (1) não podem ser considerados como EDO.

Para um tratamento matemático mais rigoroso das equações do tipo (1), necessitava-se de uma nova teoria. Visto que o “ruído branco” é somente um processo estocástico generalizado. A integral indefinida,

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds, \quad (3)$$

pode ser identificada com o processo de Wiener. Isto é um processo estocástico Gaussiano com continuidade, mas em nenhum lugar diferenciável, funções amostras, com covariância  $EW_t W_s = \min(t, s)$  e média  $EW_t = 0$ .

Em geral, (3) é simbolicamente apresentada como,  $dW_t = \xi_t dt$ , e portanto, (1) pode ser escrita na forma diferencial,  $X_{t_0} = c$ ,

$$dX_t = f(t, X_t) dt + G(t, X_t) dW_t, \quad (4)$$

que é a EDE de Itô para o processo  $X_t$ . Deve-se compreender como uma abreviatura para a equação integral,

$$X_t = c + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t G(s, X_s) dW_s. \quad (5)$$

As funções amostra de  $W_t$  são, com probabilidade 1, contínuas entretanto não de variação limitada em todo intervalo. A segunda integral em (5) não pode, mesmo para  $G$  uniforme, ser considerada como uma integral ordinária de Riemann-Stieltjes com respeito as funções amostra de  $W_t$ , porque o valor depende dos pontos intermediários nas somas aproximadas. Em 1951, Itô[1] definiu integrais da forma,

$$Y_t = \int_{t_0}^t G(s) dW_s,$$

para uma larga classe de funcionais não antecipativos  $G$  do processo de Wiener, e assim coloca a teoria de EDE sobre uma sólida base.

A solução de uma EDE (4) é um processo de Markov com funções amostras contínuas, ou seja, um processo difusivo. Inversamente, cada processo difusivo é a solução de uma EDE (4) onde  $f$  e  $G^2$  são, respectivamente, os coeficientes de *drift* e de difusão.

O cálculo de EDE pertence aos métodos probabilístico ou diretos desde que esteja-se interessados na variável aleatória  $X_t$  e sua variação. Uma eq. (4) ou (5) representa uma regra de construção, com a qual se pode construir a trajetória amostra de  $X_t$  dada a trajetória de um processo Wiener  $W_t$  e um valor inicial  $c$ .

## 2 Convergência

Na avaliação da qualidade de um esquema numérico é necessário dispor de algum tipo de medida de quão bem o método aproxima a solução analítica, ou seja, de que forma é que a solução numérica convergem para a solução analítica. No caso estocástico, ao contrário do caso determinístico, há mais de um método de medição da convergência. Consideramos que os dois tipos principais de convergência, referidos como *Convergência Fracas* e *Fortes*.

### 2.1 Convergências Fortes

O conceito de uma convergência forte utiliza o conceito de erro absoluto, que é a apenas a expectativa do valor absoluto da diferença entre a aproximação numérica e a solução analítica no momento  $t$ , ou seja,  $E|X_t - Y(\tau_n)|$ . Dizemos uma aproximação discreta no tempo  $Y(\tau_n)$  da solução exata  $X$  de uma EDE convergente no sentido forte com ordem  $\gamma > 0$  se existe constante  $C < \infty$  tal que

$$E|X_t - Y(\tau_n)| \leq C \Delta^\gamma$$

para todos os passos fixos  $\Delta \in (0, 1)$ . No caso determinístico com coeficiente de difusão  $G \equiv 0$  e a esperança excluída deste critério concorda com a usual convergência determinística ordem da convergência. A convergência forte fornece uma aproximação das trajetórias de amostras caminhos individuais da solução de uma EDE.

### 2.2 Convergências Fracas

Convergência forte é computacionalmente cara e uma condição não necessária ao valor esperado, apenas informações sobre o tipo de solução é de interesse. Se, por exemplo, e somente se requerer para calcular um momento da solução  $X$ , nós não somos obrigados a aproximar individualmente o caminhos de  $X$  o que leva ao conceito de convergência fracas. Nós dizemos que uma aproximação discreta no tempo,  $Y$ , de uma solução  $X$  de uma EDE converge no sentido fraco com ordem  $\beta > 0$  se, por qualquer polinômio  $g$ , existe uma constante  $C < \infty$  tal que

$$|E(g(X_t)) - E(g(Y(\tau_n)))| \leq C \Delta^\beta \quad (6)$$

para todos os passos fixos  $\Delta \in (0, 1)$ , desde que estes existam funcionais. Em certo sentido este critério proporciona um erro da média, variância ou qualquer momento que é necessário. Mais uma vez, quando  $G(t, X_t) \equiv 0$  e  $g(x) = x$  isto reduz ao caso determinístico. Geralmente é mais fácil e mais rápido para implementar métodos numéricos sujeitos a esta condição de convergências fracas. É importante quando se aproxima um problema de identificação (se possível) seja uma boa aproximação do caminho é necessária seja ou uma aproximação de algum funcional da solução.

### 3 Aproximação de Euler

Uma das mais simples aproximação discreta do tempo de um processo Itô é o *Aproximação de Euler*. Consideremos um processo de Itô  $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$  associado com a EDE,

$$dX_t = f(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, \quad (7)$$

para  $t_0 \leq t \leq T$  com o valor inicial,  $X_{t_0} = X_0$ . Para uma dada discretização  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$  do intervalo de tempo  $[t_0, T]$ , uma aproximação de Euler é um processo estocástico com tempo discreto  $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$  satisfazendo

$$Y_{n+1} = Y_n + f(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + G(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}), \quad (8)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  com valor inicial,

$$Y_0 = X_0. \quad (9)$$

onde se escreve  $Y_n \approx Y(\tau_n)$  para o valor da aproximação no tempo discreto  $\tau_n$ , e também,  $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ , para o  $n$ -ésimo incremento do tempo e chama-se  $\delta = \max_n \Delta_n$  o *passo de tempo máximo*. Neste trabalho considera-se o tempo discretizado com intervalos equidistantes,  $\tau_n = t_0 + n\delta$ , com  $\delta = \Delta_n \equiv \Delta = (T - t_0)/N$  para algum inteiro  $N$  suficientemente grande tal que  $\delta \in (0, 1)$ .

Quando o coeficiente de difusão é igual a zero,  $G(t, X_t) \equiv 0$ , o esquema estocástico (8) reduz-se ao esquema de Euler determinístico para a EDO,  $dx/dt = f(t, x)$ .

A seqüência  $\{Y_n, n = 0, 1, \dots, N\}$  de valores da aproximação de Euler (8) nos instantes  $\tau_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  do tempo discretizado pode

ser calculada de modo similar ao caso determinístico. A diferença é que agora tem-se a necessidade de gerar incrementos aleatórios, para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ,

$$\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}, \quad (10)$$

do processo de Wiener  $W = \{W_t, t \geq 0\}$ . Onde são variáveis aleatórias Gaussianas independentes com média,  $E(\Delta W_n) = 0$ , e a variância,  $E((\Delta W_n)^2) = \Delta_n$ .

Os incrementos  $\Delta W_n$ , em (10), do processo de Wiener podem ser gerados por um dos geradores de números pseudo-aleatório Gaussiano independente. Neste trabalho é usado o gerador *Polar Marsaglia* apresentado em Kloeden[9].

Para simplificação de notação escreve-se freqüentemente,  $f = f(\tau_n, Y_n)$ , para cada função definida em  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  e  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ . Pode-se então reescrever o esquema de Euler (8) na forma abreviada,

$$Y_{n+1} = Y_n + f\Delta_n + G\Delta W_n, \quad (11)$$

para aproximar uma EDE. Geralmente, deixaremos não estabelecida a condição inicial (9).

#### 3.1 Interpolação da Aproximação do Tempo Discreto

A Estrutura recursiva do esquema de Euler, que avalia o valor aproximado do processo de Itô somente nos instantes discretizados, é a chave para uma implementação bem sucedida no cálculo numérico. Aqui se focaliza na aproximação discreta do tempo com uma estrutura recursiva. Enfatizando-se que sempre é considerada uma aproximação discreta do tempo como sendo um processo estocástico contínuo definido no intervalo inteiro  $[t_0, T]$ , embora se esteja interessado principalmente em seus valores nos tempos discretos. Isto facilita muitas provas teóricas e a visualização das trajetórias amostra resultantes.

O esquema de Euler (11) determina valores do processo aproximando-se somente no tempo discretizado. Se necessário, os valores podem então ser determinados nos instantes intermediários por um método apropriado de interpolação. O mais simples é o *piecewise constant interpolation* com  $Y(t) = Y_{n_t}$ ,  $t \in [0, \infty)$ , onde  $n_t$  é o inteiro definido por  $n_t = \text{Max}\{n = 0, 1, \dots, N : \tau_n \leq t\}$ .

Entretanto, a interpolação linear,

$$Y(t) = Y_{n_t} + \frac{t - \tau_{n_t}}{\tau_{n_t+1} - \tau_{n_t}}(Y_{n_t+1} - Y_{n_t}), \quad (12)$$

é usada freqüentemente porque é contínua e também simples.

Concentra-se nos valores de uma aproximação discreta do tempo em dados instantes discretizados, onde não é possível reproduzir a estrutura mais detalhada da trajetória amostra de um processo de Itô, porque ela herda as irregularidades da trajetória amostra governada pelo processo de Wiener, e em particular sua não diferenciabilidade.

## 4 Principais Modelos de EDEs

Apresenta-se aqui alguns casos de EDE que têm aplicações em finança.

### 4.1 EDE Linear com Coeficientes Constantes

Consideramos o caso simples de EDE onde os coeficientes de *drift* e de difusão são independentes da informação recebida no tempo, ou seja,

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, \infty), \quad (13)$$

onde  $W_t$  é um processo de Wiener.

Nesta EDE, os coeficientes  $\mu$  e  $\sigma$ . Portanto, eles não dependem do conjunto de informação do tempo  $I_t$ . A média de  $\Delta S_t$  durante um pequeno intervalo de tempo de comprimento  $h$  é dada por  $E[\Delta S_t] = \mu h$ . A variação esperada em  $\Delta S_t$  é dada  $Var(\Delta S_t) = \sigma^2 h$ .

### 4.2 EDE Geométrica

A EDE padrão usada para modelagem de preço de ativos subjacentes não é a EDE linear de coeficientes constante, e sim, a equação do movimento Browniano Geométrico,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in [0, \infty). \quad (14)$$

Essa equação foi estudada por Black e Scholes[10] no desenvolvimento da modelagem de precificação de opções.

Esse modelo implica que em termos da notação formal,  $f(t, S_t) = \mu S_t$  e  $G(t, S_t) = \sigma S_t$ . Portanto, o coeficiente de *drift* e o de

difusão dependem da informação que se torna disponível no tempo  $t$ . Entretanto, essa dependência é de preferência direta. O *drift* e o desvio padrão mudando proporcionalmente com  $S_t$ . De fato, dividindo a eq. (14) por  $S_t$ , obtem-se

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (15)$$

Isto significa que embora os coeficientes de *drift* e de difusão da EDE geométrica tenham variação com o passar do tempo  $t$ , estes em relação a  $S_t$  ainda são parâmetros invariante no tempo.

A eq. (14) tem solução explícita exata dada por,

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right), \quad (16)$$

apresentada em Arnold[6] e Thomaz[11].

### 4.3 Processo *Square Root*

Um modelo do processo *Square Root* é,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t, \quad t \in [0, \infty), \quad (17)$$

aqui o coeficiente de *drift* segue da mesma forma que da EDE geométrica, porém o coeficiente de difusão é uma função da raiz quadrada de  $S_t$ .

Se a volatilidade do preço do ativo não aumentar “demasiado” quando  $S_t$  aumenta, este modelo pode ser mais apropriado. Este, naturalmente, será o caso se  $S_t > 1$ .

### 4.4 Processo *Mean Reverting*

Uma EDE que tem sido útil em modelar preços de ativos é o modelo *mean reverting*, usado freqüentemente para modelar a dinâmica da taxa de Juros:

$$dS_t = \lambda(\mu - S_t)dt + \sigma S_t dW_t, \quad (18)$$

como  $S_t$  está geralmente abaixo de algum “valor médio”  $\mu$ , o termo entre parênteses,  $(\mu - S_t)$ , tornar-se positivo. Isto faz com que  $dS_t$  seja mais provavelmente positiva.  $S_t$  eventualmente moverá no sentido de e reverter ao valor  $\mu$ .

Uma outra EDE relacionada a essa surge quando o *drift* é do tipo *mean reverting*, mas a difusão é dependente da raiz quadrada de  $S_t$ ,

$$dS_t = \lambda(\mu - S_t)dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t. \quad (19)$$

Existe uma diferença significativa entre a EDE *mean reverting* e os dois modelos precedentes.

O processo *mean reverting* tem uma tendência, mas as derivações em torno desta tendência não são completamente aleatórias. Os preços dos ativos podem exibir alguns previsões com periodicidades. Isto usualmente faz o modelo inconsistente com a eficiência do mercado.

## 5 Resultados Numéricos

Apresenta-se resultados de experimentos numéricos com o objetivo de ilustrar alguns aspectos importantes relativos à aplicação dos métodos numéricos em EDE no mercado financeiro. A primeira parte dos experimentos apresentados é destinada a estudos de convergência da implementação computacional, e a segunda parte são apresentadas situações das diversas EDE apresentadas.

### 5.1 Estudos de Convergência

Este exemplo, tem como objetivo verificar a convergência da solução numérica da EDE, (11), para a solução analítica (16).

A taxa de convergência forte esperada é de  $\gamma = 1/2$ , para o problema totalmente discreto usando o esquema de Euler na discretização temporal para EDE Geométrica. Na simulação computacional usa-se os valores:  $\mu = 0,15$ ,  $\sigma = 0,30$  e  $h = 0,001$ , com a condição inicial  $S_0 = 100$ , para verificação da convergência do método. Adotou-se a relação de  $\Delta^{\gamma=1/2}$  variando-se a quantidade de passos no tempo, em 16, 32, 64, 128 e 256.

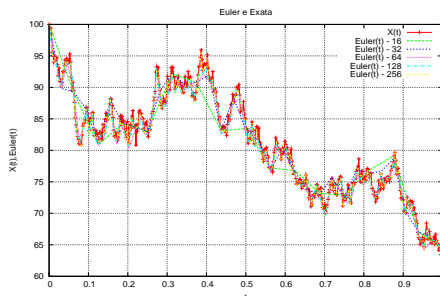


Figura 1: Solução Exata e Aproximação de Euler

A Figura 2 apresenta o gráfico de convergência para aproximação do EDE Geométrica. É confirmada a convergência com

a taxa de  $1/2$ , como previsto na teoria, como se pode constatar pela inclinação da reta correspondente ao gráfico  $\log_2(\Delta) \times \log_2(E|\text{erro}|)$  apresentada.

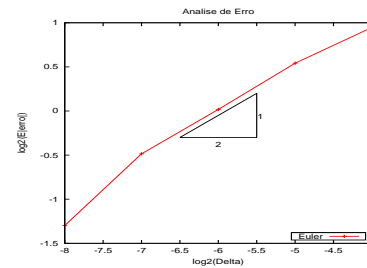


Figura 2: Análise de convergência

Simulando novamente com os mesmos parâmetros, tem-se na Figura 3 uma trajetória amostral diferente na Figura 1, porém com a mesma convergência, podendo ser visualizada na Figura 4.

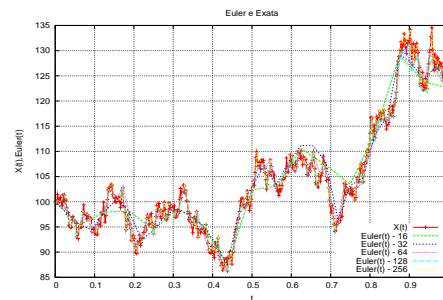


Figura 3: Solução Exata e Aproximação de Euler

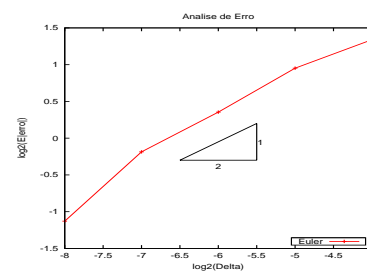


Figura 4: Análise de convergência

### 5.2 Simulações de EDE

Primeiro exemplo de simulação de trajetória amostra é EDE linear com coeficientes constantes que é apresentada na Figura 5. Na simulação computacional usa-se os valores:  $\mu = 0,01$ ,  $\sigma = 0,03$  e  $h = 0,001$ . E a condição inicial como  $S_0 = 100$ .

A partir do gerador do número aleatório foi obtido os 1000 valores independentes. Sendo as

variáveis aleatórias Normalmente distribuídas, com média *zero* e variância 0,001. O fato que  $W_t$  em (13) é uma *martingale* permite o uso de variáveis aleatórias independentes.

Uma aproximação discreta de (13) é usada para obter o  $S_t$  apresentado na Figura 5, onde foram calculadas, para  $K = 1, 2, \dots, 1000$ ,

$$S_K = S_{K-1} + 0,01(0,001) + 0,03(\Delta W_K).$$

Dada uma condição inicial  $S_0$ , substitui-se  $\Delta W_t$  proveniente de números aleatórios normalmente distribuídos obtendo o  $S_t$  sucessivamente.

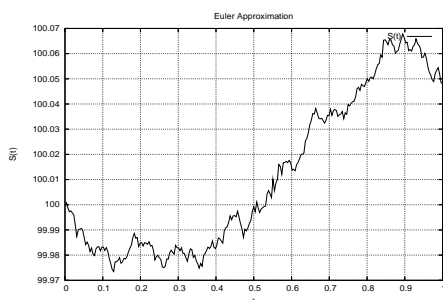


Figura 5: Aproximação de Euler

Como pode ser visto,  $S_t$  parece flutuar em torno de uma linha reta com inclinação  $\mu$ . O tamanho de  $\sigma$  determina a extensão das flutuações em torno desta linha. Note que estas flutuações não se tornam maiores enquanto o tempo passa. Isto sugere que tal EDE é apropriada na prática. Em particular, esta EDE é uma boa aproximação se a “variação” dos preços do ativo é estável sobre o tempo e se não aparecerem saltos sistemáticos (“*jumps*”) nos preços do ativo.

### 5.2.1 EDE Geométrica

A Figura 6 apresenta uma realização do  $S_t$  obtido de uma aproximação de diferenças finitas de

$$dS_t = 0,15S_t dt + 0,30S_t dW_t, \quad (20)$$

com a condição inicial  $S_0 = 100$ . Como pode ser visto no gráfico, o  $S_t$  é feito de duas componentes. A Primeira, existe uma tendência exponencial de crescimento de 15%. A segunda, existe uma flutuação aleatória em torno desta tendência. Estas variações aumentam com o tempo excedente por causa de preços mais elevados.

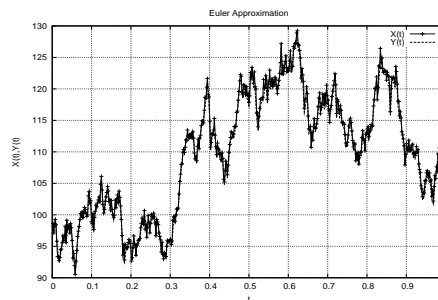


Figura 6: Solução Exata ( $X(t)$ ) e Aproximação de Euler ( $Y(t)$ ) para Preço do Ativo Subjacente

### 5.2.2 Processo Square Root

Como por exemplo, apresenta-se, na Figura 6, a trajetória amostra obtida dos mesmos termos de  $dW_t$  usado para gerar a Figura 6. Considerando-se a equação

$$dS_t = 0,15S_t dt + 0,30\sqrt{S_t}dW_t, \quad (21)$$

onde os coeficientes de *drift* e de difusão estão como no caso da Figura 6, porém agora a difusão é proporcional a  $\sqrt{S_t}$  em vez de ser proporcional a  $S_t$ . Seleciona-se o ponto inicial como  $S_0 = 100$ .

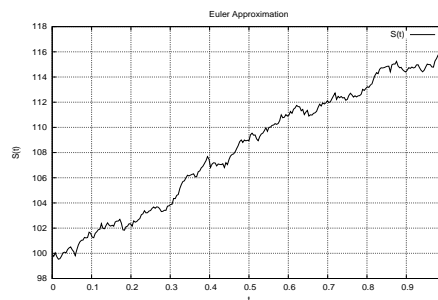


Figura 7: Aproximação de Euler

Claramente, as flutuações na Figura 8 são mais dominadas do que na Figura 8, contudo a trajetória amostra apresenta tendências “similares”.

Uma outra característica deste processo é o significado do parâmetro  $\sigma$ . verifica-se com a especificação da componente de difusão, o  $\sigma$  não pode ser interpretado como a volatilidade de  $S_t$ . Porém os mercados, em outra linha, tem como convenção  $\sigma$  como a volatilidade da porcentagem dos Ativos Subjacentes.

### 5.2.3 Processo mean reverting

Um exemplo da trajetória amostra de um processo *mean reverting* é apresentado na Figura

8. Seleccionando-se,  $\mu = 0,05$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\sigma = 0,8$ . Isto implica uma média de 5 % e uma volatilidade de 80 % durante um intervalo do tempo do comprimento 1. O  $\lambda$  implica um ajuste de 50 %.

O comprimento dos subintervalos finitos como o  $h = 0,001$ . De acordo com este, durante um intervalo do tempo do comprimento 1, observa-se os 1000  $S'_t$ s.

Os números aleatórios com média zero e variância 0.001 foi obtido, e o caminho amostra foi gerado usando os incrementos, para  $k = 1, \dots, 1000$ , o ponto inicial usado foi  $S_0 = 100$ ,

$$\Delta S_k = 0,5(0,05 - S_{k-1})(0,001) + 0,8\Delta W_k, \quad (22)$$

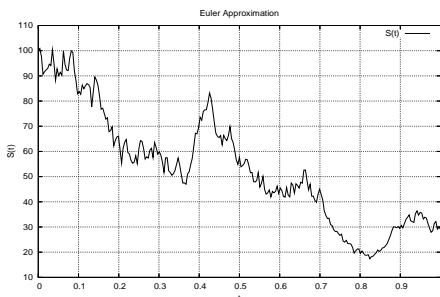


Figura 8: Aproximação de Euler

## 6 Conclusão

Neste trabalho, apresenta um exemplo de aplicação do método numérico, método de diferenças finitas, a um problema de equações diferenciais estocásticas aplicado a engenharia financeira.

Foi apresentado um estudo da modelagem matemática estocástica das EDE e sua solução numérica na aproximação discreta do tempo, por diferenças finitas e também foi apresentado o estudo de convergência para EDE e os principais tipos de EDEs usadas para a modelagem de Preço de Ativos no Mercado Financeiro, como exemplo, de aplicação direta das EDEs em problema de origem Econômica.

Estudos de problemas modelados por EDP Estocásticas aplicadas a Engenharia Financeira e a aplicação de outros métodos numéricos os principais modelos de EDEs apresentado neste trabalho, são motivações de trabalhos futuros.

## Agradecimento

O autor agradece ao suporte recebido pela *USA Contractors, INC.* e pelo *Grupo Estudo Monetário Financeiro, GEMF*, da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, *FEUC*.

## Referências

- [1] K. Itô. On stochastic differential equations. *New York, Amer. Math. Soc.*, (4), 1951.
- [2] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Springer Verlag, 1984.
- [3] E.B. Dynkin. *Markov Processes*, volume 1,2. Springer, Berlin, Göttingen, and Heidelberg, 1996.
- [4] H.P. McKean. *Stochastic Integrals*. New York, Academic Press, 1969.
- [5] A.V. Skorokhod. *Studies in the Theory of Random Processes*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1965.
- [6] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, 1974.
- [7] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications*. Springer-Verlag, 1985.
- [8] P. Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. In *C.R. Acad. Sci.*, volume 146, pages 530 – 533, Paris, 1908.
- [9] P.E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Number 23 in Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 1995.
- [10] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 4:323–338, 1973.
- [11] J.C.A. Thomaz and A.F.D. Loula. Numerical solution of stochastic differential equation in finance. In *Third Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, pages 344 – 347, 2007.