

Uso de Métodos Perturbativos para a Análise de Sensibilidade de Modelos Balísticos

Maurício Kischinhevsky, Luís A. G. Abreu,

UFF - Instituto de Computação

24210-240, Niterói, RJ

E-mail: kisch@ic.uff.br, labreu@ic.uff.br,

Resumo: *Um grande problema presente na análise de sensibilidade local é a quantidade de cálculos que precisa ser feita com as equações de um modelo para se estimar a influência das alterações em cada parâmetro. No método direto, conhecido também como “força bruta”, é necessário realizar pequenas alterações nas condições iniciais e constantes do sistema para, em seguida, ser obtida nova determinação numérica de seus valores e uma avaliação da sensibilidade por meio de diferenças finitas. Alguns problemas surgem ao se trabalhar assim: além do custo computacional, existe a dificuldade em se determinar uma faixa onde se possam considerar as variações usadas como realmente lineares. Diversas abordagens alternativas foram feitas. Entre as mais populares estão o uso de sistemas adjuntos, de solução numérica menos trabalhosa, e métodos que eliminem a necessidade de integrações numéricas. Este artigo se propõe a fazer parte desse segundo grupo, ao pretender deduzir uma aproximação analítica de um sistema proposto e estudar suas sensibilidades por meio de derivadas simples. A ferramenta a ser utilizada é a teoria das perturbações que, dentro de certos limites, pode fornecer expressões analíticas satisfatórias; sendo o deslocamento de um projétil em meio resistente o caso de estudo abordado.*

1 Métodos Perturbativos

Antes de iniciar ao tratamento do modelo proposto, será feito um exemplo simples, adaptado de [2, cap. I], para a apresentação do ferramental utilizado. Seja a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon x)^2} \quad (1)$$

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

Estipulando que se possa representar a equação (1) por meio de uma expansão assintótica:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (2)$$

Substituindo-a em (1), resulta que:

$$x_0''(t) + \varepsilon x_1''(t) + \dots = \frac{1}{[1 + \varepsilon(x_0(t) + \dots)]}$$

$$\sim -1 + 2\varepsilon x_0(t) + \dots$$

Agrupando-se os termos pela ordem de ε :

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= -1 & x_1''(t) &= 2x_0(t) \\ x_0(0) &= 0 & x_1(0) &= 0 \\ x_0'(0) &= 1 & x_1'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo-se as duas equações e colocando o resultado na forma da expansão (2):

$$x(t) \gtrsim t \left(1 - \frac{t}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{3} t^3 \left(1 - \frac{t}{4}\right)$$

Neste simples exemplo, a expansão (2), em potências simples de ε , foi uma escolha apropriada para aproximar a equação (1). Caso surgisse alguma incompatibilidade ao se agrupar os termos, outros tipos de expansão deveriam ser pesquisados. Vale lembrar que em nenhum instante foi questionada a convergência da expansão assintótica. Na verdade, ela pode convergir para uma função diferente da original ou até ser divergente. Contanto que $\varepsilon \ll 1$, os primeiros termos da expansão podem fornecer uma aproximação satisfatória antes que o erro se torne significativo.

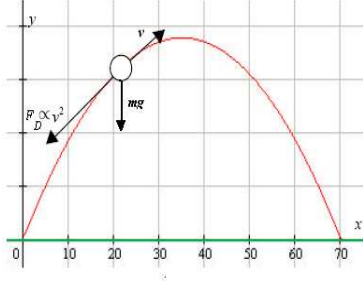


Figura 2: Modelo balístico ponto de massa

coeficiente de arrasto (adimensional). O termo $\rho A/(2m)$ será abreviado por k . Para evidenciar a presença de um termo perturbativo ε , convém que o sistema (5) seja reescrito em uma forma adimensional. Realizando as transformações $v = v_0 V$ e $t = T/(kv_0)$, onde v_0 é a velocidade inicial, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -\frac{g}{kv_0^2} \text{sen } \alpha - V^2 \\ V \frac{d\alpha}{dT} = -\frac{g}{kv_0^2} \cos \alpha \end{cases} \quad (6)$$

Se $v_0 \gg g$, então pode-se considerar $\varepsilon \equiv g/(kv_0^2)$, portanto uma expansão assintótica deduzida a partir do sistema (6) é adequada para disparos de alta velocidade. Para facilitar a resolução do sistema acima, multiplica-se a última equação por $\cos \alpha$:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^2 - \varepsilon \text{sen } \alpha \\ V \cos \alpha \frac{d\alpha}{dT} = -\varepsilon \cos^2 \alpha \end{cases}$$

E então:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = -V^2 - \varepsilon \text{sen } \alpha \\ V \frac{d(\text{sen } \alpha)}{dT} = \varepsilon (\text{sen}^2 \alpha - 1) \end{cases}$$

Pode-se constatar, também, que o sistema satisfaz à condição para que se possa gerar duas expansões independentes $V(T) \sim V_0(T) + \varepsilon V_1(T) + O(\varepsilon^2)$ e $\text{sen } \alpha(T) = A_0(T) + \varepsilon A_1(T) + O(\varepsilon^2)$. O resultado obtido é:

$$\begin{aligned} V(T) &\sim \frac{1}{T+1} + \frac{\varepsilon}{3} \text{sen } \alpha_0 \left(\frac{1}{(T+1)^2} - (T+1) \right) \\ \text{sen } \alpha(T) &\sim \text{sen } \alpha_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \alpha_0 \left(1 - (T+1)^2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

A expansão para a velocidade horizontal pode ser obtida fazendo-se $V_X(T) =$

$V(T) \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha(T)}$. Eliminando-se todas as parcelas de ordem maior ou igual à segunda, tem-se:

$$\begin{aligned} V_X(T) &\sim \frac{\cos \alpha_0}{T+1} + \\ &+ \frac{\varepsilon \text{sen } 2\alpha_0}{12} \left(\frac{2}{(T+1)^2} - \frac{3}{T+1} + (T+1) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Integrando, com $X(0) = 0$:

$$\begin{aligned} X &\approx \cos \alpha_0 (\ln(1+T)) \\ &+ \frac{\varepsilon \text{sen } \alpha_0}{12} \left(-\frac{4}{T+1} - 6 \ln(1+T) + (T+1)^2 + 3 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Pormenores dos cálculos podem ser encontrados em [3] e uma generalização para diversos tipos de C_D em [1].

4 Propriedades das Expansões

Derivando-se a expansão (8), é encontrada uma aproximação para a aceleração instantânea:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dT} &= -\frac{\cos \alpha_0}{(T+1)^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon \text{sen } 2\alpha_0}{12} \left(-\frac{4}{(T+1)^3} + \frac{3}{(T+1)^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

No instante $T = 0$:

$$\frac{dV_x(0)}{dT} = -\cos \alpha_0$$

Redimensionalizando com a transformação $dv_x/dt = v_0^2 k dV_x/dT$:

$$\frac{dv_x(0)}{dt} = -\cos \alpha_0 k v_0^2$$

Este resultado concorda com esperado para o instante inicial, quando a aceleração horizontal corresponde exclusivamente à resistência do ar nessa direção. Isto revela que, para o início da trajetória, os termos de ordem zero de (8) e (9) contem a parte mais significativa se suas expansões. Além disso, os termos de primeira ordem estão multiplicados por uma constante de $\text{sen } 2\alpha_0/12$, o que reduz a importância deles para trajetórias rasantes. Portanto será analisado o comportamento da parcela de ordem zero para mudanças em v_0 e k .

Para $T < 1$ vale a aproximação

$$X(T) = \ln(1+T) = T - \frac{T^2}{2} + O(T^3)$$

Para projétil 105 HE ($m = 14,969$ kg e $C_D = 0,124$) e $v_0 = 400$ m/s, essa condição para T é válida até cerca de $t = 75$ s. Redimensionalizando X :

$$x(t) \sim \frac{1}{k} \left(tkv_0^1 + \frac{1}{2}t^2k^2v_0^2 \right) = tv_0 - \frac{1}{2}t^2kv_0^2$$

Logo:

$$\Delta x(t) \sim t(v_0 + \Delta v_0) - \frac{1}{2}t^2(k + \Delta k)(v_0 + \Delta v_0)^2 - tv_0 + \frac{1}{2}t^2kv_0^2$$

Considerando $\Delta v_0 \ll v_0$ e descartando os termos em $\Delta k \Delta v_0$, a estimativa para Δx se torna:

$$\Delta x(t) \sim t\Delta v_0(1 - tkv_0) - \frac{\Delta k}{2}t^2v_0^2 \quad (11)$$

O que expõe não só a proporcionalidade entre Δv_0 e Δk e a aditividade entre eles, com um erro de ordem maior que um. Resultado análogo pode ser obtido para a velocidade [1].

Ressalte-se que todas as aproximações feitas até agora, inclusive a para o exemplo(1), possuem validade limitada. Suas parcelas de primeira ordem não se esvaem conforme $t \rightarrow \infty$, chegando a um ponto em esta parcela terá a mesma magnitude que a de ordem zero. Nesse instante, uma determinada expansão deixa de representar o modelo original, pois viola a presunção de uma não-linearidade baixa.

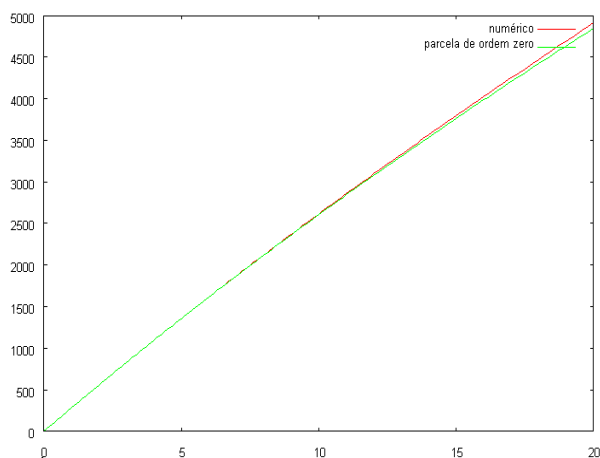


Figura 3: Gráfico *alcance* (m) \times *tempo* (s) confrontando a parcela de ordem zero da expansão (9) com o calculado numericamente por Runge-Kutta de 4ª ordem, passo $h = 0,1$. Modelo de projétil é o 105mm HE, $v_0 = 400$ m/s e $\alpha_0 = 45^\circ$.

5 Análise de Sensibilidade Local

A Análise de Sensibilidade Local (ASL) se concentra no impacto circunstancial dos parâmetros num modelo. Segundo [6, p. 83], a forma mais simples de calcular sensibilidades locais é alterar ligeiramente um dos parâmetros de cada vez e reexecutar o modelo. Usando a aproximação por diferenças finitas, os elementos de uma matriz de sensibilidades seriam:

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = \frac{f(p_j + \Delta p_j) - f(p_j)}{\Delta p_j} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

Este procedimento é conhecido como método de força bruta ou indireto. Tem a vantagem imediata de dispensar mudanças no modelo original e requerer pouco código extra. Por outro lado, a acurácia da sensibilidade depende de Δp_j : se este for muito pequeno, erros de arredondamento surgirão; caso seja grande demais, a presunção de linearidade local fica comprometida. Sugere-se 1% de alteração como valor prático, apesar de a descoberta de um percentual ideal poder ser um processo de “ensaio e erro”.

Para o caso do projétil, em relação ao alcance, esta questão não é tão crítica devido à presença de uma tolerância à linearidade vista anteriormente. O cálculo para perturbações pode ser feito com valores de até 10% [1, cap. IV]. Como se têm boas aproximações analíticas das funções dentro de certo limite de tempo, pode-se fazer uma adaptação da idéia proposta em [4], que usava aproximações empíricas para (12) válidas em determinado instante para certa região de um parâmetro. Neste caso, em que lugar de um modelo experimental, são usadas as expansões perturbativas, baseando-se na propriedade:

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = \frac{\partial (f_0 + \varepsilon f_1)}{\partial p_j} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Algumas considerações devem ser feitas. Este modelo, de fato, aproxima-se do numérico quanto mais alta for a velocidade de disparo, porém deve-se ter em mente que a validade das expansões para velocidade e alcance são limitadas no tempo. Isto não chega a ser um empecilho em aplicações práticas onde a trajetória

sempre tem a duração limitada até o impacto com o alvo ou o solo. Caso se deseje disparos de duração teórica extremamente longa, convém ajustar as expansões (7) por meio de algum método para tratamento de singularidades no domínio. Como o maior interesse aqui é em trajetórias mais rasantes, as parcelas de ordem zero das expansões (8) e (9) são as mais significativas, permitindo uma simplificação das estimativas (13) e garantindo sua aditividade.

Os gráficos abaixo foram feitos exclusivamente com estimativas feitas com as parcelas de ordem zero e numéricas, $v_0 = 300$ m/s e $\alpha_0 = 30^\circ$. Considerou-se que:

$$\Delta x(\Delta k, \Delta v_0) \sim x_0(k + \Delta k, v_0 + \Delta v_0) - x_0(k, v_0)$$

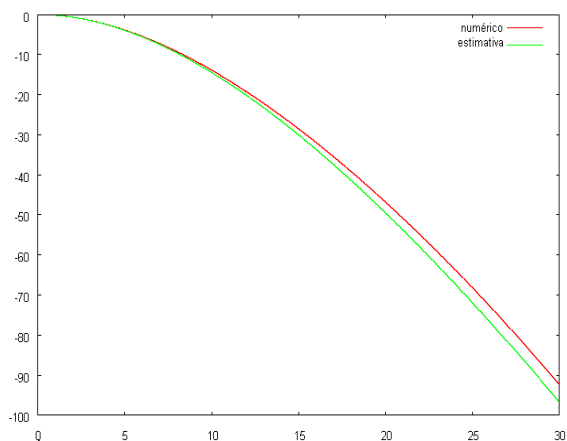


Figura 4: Gráfico *variação de alcance (m) × tempo (s)* para um aumento de 10% na densidade do ar.

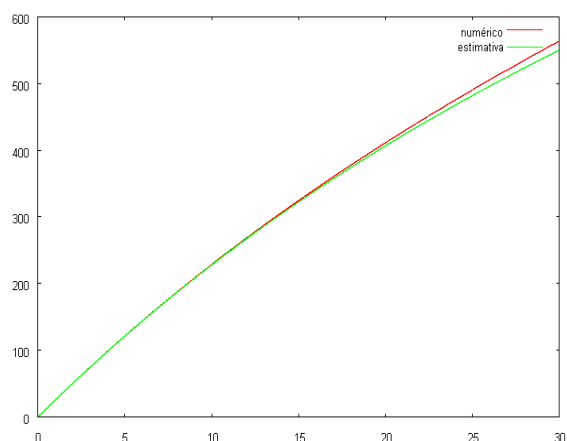


Figura 5: Gráfico *variação de alcance (m) × tempo (s)* para um aumento de 10% em v_0 .

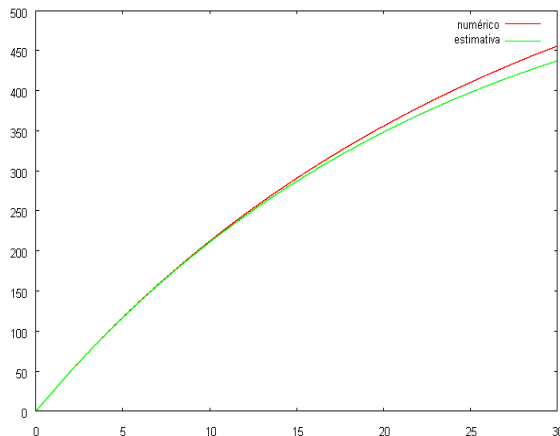


Figura 6: Gráfico *variação de alcance (m) × tempo (s)* para um aumento de 10% na densidade e em v_0 . Exibe a aditividade entre os dois gráficos anteriores.

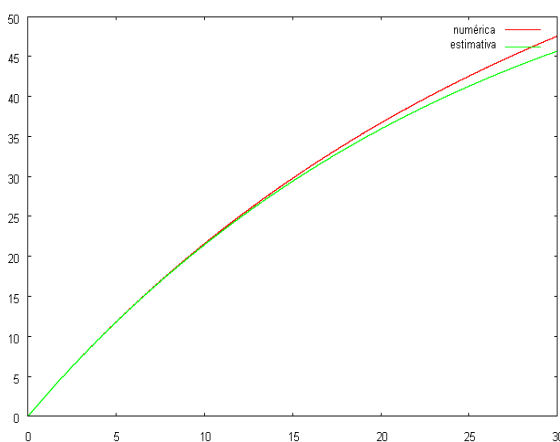


Figura 7: Gráfico *variação de alcance (m) × tempo (s)* para um aumento de 1% na velocidade e em v_0 . É praticamente o gráfico para 10% reduzido em escala.

6 Considerações Finais

A abordagem apresentada neste artigo conseguiu realizar a análise de sensibilidade e uma avaliação qualitativa do modelo de um projétil balístico por meio de uma aproximação analítica. Embora satisfatória dentro das condições estipuladas, a aproximação analítica não tem por objetivo substituir a numérica, mas em atuar uma como complemento da outra. A primeira ainda precisa da última para sua verificação, determinação da extensão de sua validade e pode usá-la para sua calibragem, como é exposto em [1, cap. VII] onde se adapta a expansão (9) para atmosfera variável. Em vez de dois campos distintos, que

pouco trocam entre si, uma abordagem mista pode gerar bons dividendos.

Referências

- [1] L.A.G Abreu, “Métodos Semi-Analíticos Perturbativos para Trajetória de Projéteis”, Dissertação de Mestrado, IC-UFF, 2008.
- [2] M.H. Holmes, “Introduction to Perturbation Methods”, Springer, 1998.
- [3] R. L. McCoy, “Modern Exterior Ballistics”, Schiffer Military History, 1999.
- [3] N. Mestre, “The Mathematics of Projectiles in Sport”, Cambridge University Press, 1990.
- [4] D. Miller e M. Frenklach, “Sensitivity Analysis and Parameter Estimation in Dynamic Modeling of Chemical Kinetics”. *International Journal of Chemical Kinetics*, v. 15, p. 677-696, 1983.
- [6] A. Saltelli, K. Chan e E. M. Scott, “Sensitivity Analysis, John Willey and Sons Ltd, 2004.