

Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento animal

Juliana Scapim

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP,
13084-971, Campinas, SP
E-mail: juscapim@yahoo.com.br

Rodney C. Bassanezi

Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC,
09210-170, Santo André, SP
E-mail:rodney@ime.unicamp.br

Resumo: *No presente trabalho, temos como objetivo estudar a curva de crescimento em peso de diversos espécimes animais, a fim de estabelecer padrões de metabolismo por classe animal. Foram ajustados os parâmetros do modelo não-linear de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento para identificar quais parâmetros descrevem melhor o crescimento do animal nas faixas de idade-peso fornecidas. Utilizamos, no estudo, dados de idade e peso de 19 espécimes, entre mamíferos, aves, anfíbios, peixes, crustáceos, vermes e insetos. Os ajustes foram feitos através de experimentos computacionais, utilizando como ferramenta de apoio o programa MATLAB. Uma vez que a principal característica de sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução e ao lidar com modelos de crescimento animal, naturalmente informações imprecisas fazem parte da modelagem, comprometendo esta precisão, optamos por concluir os resultados com o apoio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que permite trabalhar com este tipo de incerteza de maneira razoável. A conjectura inicial de que haveria um padrão de metabolismo por classe animal não se verificou, ocorrendo, inclusive, distinção entre machos e fêmeas de uma mesma espécie, como é o caso do peru. Hipoteticamente, a perda de energia parece estar relacionada com os hábitos de cada animal.*

Introdução

A utilização de modelos matemáticos para o estudo de níveis de crescimento em animais

é uma prática que pode auxiliar na escolha do melhor método de exploração de determinada espécie zootécnica. As curvas de crescimento relacionam o peso de um animal com sua idade, sendo importante para pesquisas e recomendações sobre eficiência de produção, contribuindo, assim, para aumentar o lucro do produtor [5].

Geralmente, estudam-se curvas de crescimento por meio do ajuste de funções não-lineares, que possibilitam sintetizar informações de todo o período de vida dos animais, ou seja, um conjunto de informações em série de peso por idade, em um pequeno conjunto de parâmetros interpretáveis biologicamente, facilitando, assim o entendimento do fenômeno e ressaltando características relevantes do crescimento [8, 11].

Dentre as equações não-lineares mais utilizadas para descrever a curva de crescimento em animais de produção, estão os modelos de Richards, Gompertz, von Bertalanffy e Logístico [4, 5]. Alguns requisitos devem ser satisfeitos para que uma função de crescimento seja descritiva de uma relação peso-idade, dentre os quais a interpretação biológica dos parâmetros (confiabilidade), um ajuste com pequenos desvios (precisão) e o grau de dificuldade do ajuste (operacionalidade). O modelo de von Bertalanffy foi aplicado em estudos com curvas de crescimento para rãs [11, 4], frangos [4, 6], suínos [4, 7], caprinos [4], camarão [4, 3], coelho [4], ovinos [4, 5], bovinos [4], perus [10], tilápias [9], ratos [2] e humanos [2], apresentando qualidade elevada de ajuste e estimativas

condizentes com a realidade quando comparado à outros modelos em todos os trabalhos.

Ajustamos os parâmetros do modelo não-linear de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento em peso de diversos espécimes animais, a fim de identificar quais parâmetros descrevem melhor o crescimento de cada animal nas faixas de idade-peso fornecidas, procurando estabelecer padrões de metabolismo por classe animal.

Foram utilizados dados de idade e peso de 19 espécimes, entre os quais mamíferos, aves, anfíbios, peixes, crustáceos, vermes e insetos, obtidos de instituições de pesquisa e da literatura. Os ajustes foram feitos através de experimentos computacionais.

Espécimes analisadas

Mamíferos: Suínos Machos e fêmeas, Bovinos, Caprinos, Coelhos, Ovinos, Ratos e Humanos;

Aves: Perus machos e fêmeas e Frangos machos e fêmeas;

Anfíbios: Rã-touro;

Peixes: Tilápia e Arraia;

Crustáceos: Camarão;

Vermes: Minhoca;

Insetos: Larva de mosca varejeira.

Modelo de von Bertalanffy

Com o intuito de analisar o aumento em peso de peixes, o biólogo australiano von Bertalanffy [2], formulou o seguinte modelo matemático:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \\ p(0) = p_0, \end{cases} \quad (1)$$

Seu modelo pode ser considerado uma alteração da curva de crescimento logístico de Verhulst com a finalidade de acomodar características metabólicas baseados em argumentação fisiológica, onde $p = p(t)$ é a massa do peixe em função do tempo t , p_0 é a massa inicial, α é a constante de anabolismo (representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal) e β é a constante de catabolismo (que representa a taxa de diminuição da massa por unidade de massa). O termo $p^{\frac{2}{3}}$ é proveniente da relação alométrica do peso com a área corporal do peixe [9].

Em 2002, Bassanezi[9] ao estudar o crescimento em peso de perus, propôs uma

generalização para o modelo (1), dada por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (2)$$

onde agora $P = P(t)$ é a massa da ave em função do tempo t , P_0 é a massa inicial, α e β são respectivamente as constantes de anabolismo e catabolismo e γ é um parâmetro alométrico a ser estimado, $0 < \gamma < 1$.

Resolução do modelo generalizado

A equação não linear (2) é do tipo Bernoulli e pode ser resolvida com uma substituição de variáveis, o que nos conduzirá à uma equação linear.

Tomando $Z = P^{1-\gamma}$ e substituindo em (2) temos:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) P^{-\gamma} \frac{dP}{dt} \\ Z(0) = P_0^{1-\gamma} \end{cases}$$

Como $\frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P$, então:

$$\frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) P^{-\gamma} (\alpha P^\gamma - \beta P)$$

Substituindo novamente $Z = P^{1-\gamma}$ obtemos:

$$\frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) (\alpha - \beta P^{1-\gamma}) = (1-\gamma) (\alpha - \beta Z)$$

$$\frac{dZ}{dt} + \beta(1-\gamma)Z = \alpha(1-\gamma)$$

Temos, portanto, uma EDO linear de 1ª ordem não homogênea em Z :

$$\frac{dZ}{dt} + \beta(1-\gamma)Z = \alpha(1-\gamma), \quad (3)$$

cuja solução é dada por:

$$Z(t) = \frac{\alpha}{\beta} + C e^{-\beta(1-\gamma)t}.$$

Voltando para $P(t)$, encontramos a equação do peso do animal em função do tempo:

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + C \frac{\beta}{\alpha} e^{-\beta(1-\gamma)t}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (4)$$

Sabemos que $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$, portanto a capacidade suporte P_∞ é dada por:

$$P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (5)$$

Dadas a condição inicial $P(0) = P_0$ e a equação (5), temos:

$$C = \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right] \frac{\alpha}{\beta}$$

Substituindo a constante C na expressão de $P(t)$, obtemos o modelo generalizado para crescimento em peso de um animal qualquer:

$$P(t) = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) \cdot e^{-\beta(1-\gamma)t} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \right\} \quad (6)$$

onde $P(0) = P_0$ é o peso inicial e P_∞ é o peso máximo.

O ponto de inflexão P_* , onde a variação da curva é máxima, obtido através do cálculo $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ em (2), é dado por:

$$P_* = \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} P_\infty \quad (7)$$

O tempo de inflexão t_* , obtido a partir das expressões(6) e (7), é dado pela expressão:

$$t_* = - \frac{\ln \left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{\beta(1-\gamma)} \quad (8)$$

Num modelo mais realista, devemos considerar a taxa de catabolismo β variável com o tempo, uma vez que quando o animal envelhece, hipoteticamente, a sua perda de energia depende de seus hábitos, como por exemplo se ele foi criado solto ou em regime de confinamento.

Da equação (6), podemos explicitar β em função de t :

$$\beta = - \frac{\ln \left[\frac{\left(\frac{P}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{(1-\gamma)t} \quad (9)$$

A relação que permite o cálculo constante de anabolismo pode ser obtida através da expressão (5):

$$\alpha = \beta P_\infty^{1-\gamma} \quad (10)$$

A equação (7) nos fornece uma expressão que calcula, implicitamente, o parâmetro de alometria desde que P_* seja conhecido:

$$y = \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{P_*}{P_\infty} \right) \quad (11)$$

Vale observar a sutileza da relação (11) quando o parâmetro $\gamma \rightarrow 1$: quando a razão $\frac{P_*}{P_\infty}$ é maior que $\frac{1}{e} \approx 0.3679$ não é possível ajustar os dados utilizando este modelo.

Simulações Numéricas

O parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$, obtido por von Bertalanffy para peixes [10], foi estimado como sendo igual a $\gamma = 3/4$ no caso de mamíferos por West [13] e utilizado por Oliveira no seu trabalho com suínos de corte [7]. Os demais estudos com curvas de crescimento em peso animal encontrados na literatura e referenciados no presente trabalho consideram o parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$.

Por ser um parâmetro relacionado à área corporal, acreditamos ser mais coerente que cada animal, ou mesmo a classe a que pertence, possua um valor próprio para este parâmetro, não necessariamente igual a 2/3 ou 3/4.

Portanto, levamos em conta todas estas possibilidades em nossos cálculos e simulações, com o intuito de encontrar os parâmetros que melhor se adequam ao modelo e à classe animal correspondente.

Inicialmente, calculamos o peso máximo P_∞ utilizando o método de Ford-Walford [12], tomando os valores finais de peso, a partir do ponto de inflexão P_* .

Ajustamos a curva solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2) aos dados de idade-peso através de implementação computacional do modelo, procurando estimar experimentalmente os parâmetros α , β , γ e consequentemente p_∞ para cada espécime.

Para obtenção dos parâmetros referentes à suíno utilizamos dados experimentais de crescimento em peso do Agroceres PIC de Ponte Nova-MG, referentes ao desempenho da progênie Camborough 22 e AGPIC 412 TG, em boas condições de manejo e nutrição, separada por sexo e destinada à produção de cevados com peso elevado [7]. A dispersão dos dados ao longo do tempo pode ser observada na Figura 1.

O valor do peso máximo estimado para Suíno Macho P_∞ , tomando os últimos 11 dados de peso (ponto de inflexão $P_* \cong 88.480$ kg) foi de $P_\infty = 220.402$ Kg. Oliveira, utilizando o mesmo método para o cálculo da capacidade suporte obteve $P_\infty = 192.125$ Kg considerando os últimos 9 dados. Através de testes, chega-

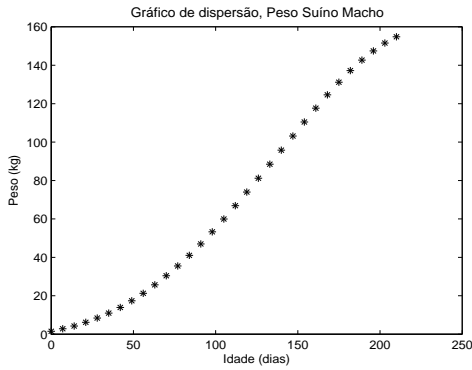


Figura 1: Curva de dispersão do dados de peso p versus tempo t para Suíno Macho.

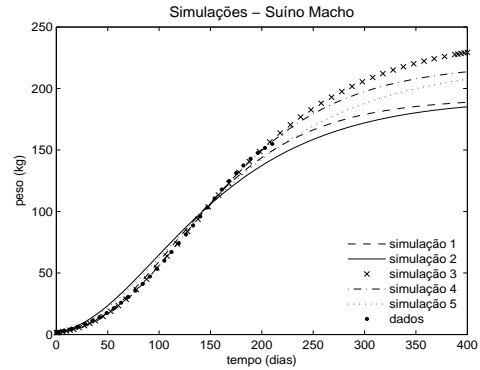


Figura 2: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (6), aos pares peso-idade de Suíno Macho

mos a $P_\infty = 192.126$ kg utilizando os últimos 8 dados de peso.

As simulações do ajuste da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado aos dados de crescimento em peso de Suíno Macho foram as seguintes:

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 192.126$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.0758$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.9861$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 192.126$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.1612$ e $\beta = 0.0433$

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.1522$, $\beta = 0.0689$, $\gamma = 0.8569$ e $p_\infty = 254.261$ kg

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 220.402$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.6813$, $\beta = 0.6096$, $\gamma = 0.9794$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 220.402$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.1491$, $\beta = 0.0387$.

As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 2.

Observando os parâmetros obtidos nas simulações, notamos que o coeficiente de alometria γ tende a ser maior que o valor $3/4$ utilizado por Oliveira quando não é mantido fixo. Os ajustes referentes às simulações 3 e 4 ofereceram menor diferença entre os dados fornecidos e a curva ajustada, sendo este último o que apresentou melhor aproximação, segundo o cálculo do erro. Porém, considerando a interpretação biológica dos resultados, notamos que o ajuste referente à simulação 3 é mais coerente com a realidade, uma vez que β geralmente não assume valores altos, por se tratar do gasto energético do animal.

Utilizando a expressão do parâmetro de

metabolismo β (9) e os valores de p_∞ e γ estimados pela simulação 3, calculamos a curva de tendência para $\beta(t)$, ilustrada na Figura 3.

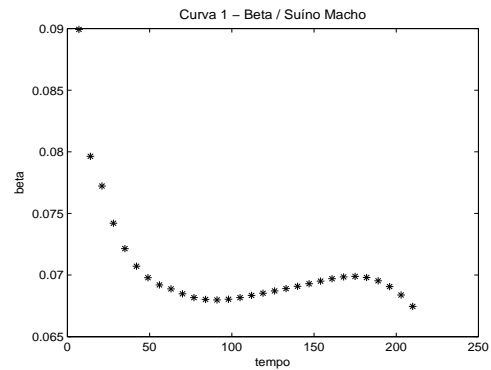


Figura 3: Curva de tendência para $\beta(t)$ de Suíno Macho com os seguintes parâmetros: $p_\infty = 254.2606$ kg, $\gamma = 0.8569$.

O mesmo procedimento foi tomado para cada indivíduo, possibilitando verificar que a conjectura inicial de que haveria um padrão de metabolismo por classe animal não acontece, ocorrendo, inclusive, distinção entre machos e fêmeas de uma mesma espécie, como é o caso do peru. Hipoteticamente, a perda de energia está relacionada com os hábitos de cada animal.

Notamos a ocorrência de tendências no comportamento da curva $\beta(t)$: β diminui com t ; β aumenta com t , depois diminui; β estabiliza com t ; β aumenta com t . Geralmente, em animais confinados para engorda a tendência de β é diminuir com o passar do tempo. Outra suposição baseia-se no comportamento de animais semi-confinados, onde a tendência de β é estabilizar com o passar do tempo. Por último, a tendência de β aumentar com t pode estar relacionada com o comportamento referente à animais soltos.

Ao trabalhar com ajuste de curvas em cresci-

mento animal é importante observar a interpretação biológica dos resultados obtidos com o modelo, do contrário estaremos pura e simplesmente fazendo um ajuste de curvas. Devemos procurar obter parâmetros com respaldo biológico, como por exemplo o ponto de inflexão, que no caso, indica o momento a partir do qual o peso começa a estabilizar e a partir de onde procuramos calcular a capacidade suporte.

Nota-se, que pequenas alterações na capacidade suporte causam mudanças significativas nos parâmetros, uma vez que são muito sensíveis a modificações. Os ajustes, em sua maioria, têm melhor resultado quando é fornecido previamente o valor limite p_∞ que o peso pode atingir.

Quando trabalhamos com dados experimentais de crescimento animal nos vemos em situações onde necessitamos estimar o comportamento da curva ao longo da vida de um determinado espécime. Fatalmente, o caminho entre a medida realizada no indivíduo, seja ela em seu peso, comprimento, idade, etc., até a solução obtida com o experimento/simulação a partir dos dados, está repleto de imprecisões, por mais cuidado que tenhamos no tratamento destas informações. Como os parâmetros são obtidos através de observações e experimentos seria interessante que pudessem admitir uma "faixa de valores" que considerasse as incertezas presentes no processo de obtenção desta solução.

Para tentar solucionar este problema e tornar plausível a solução obtida através das simulações realizadas, utilizamos como ferramenta de apoio a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que nos permite trabalhar com as incertezas inerentes à modelagem de maneira razoável.

Considerando o modelo de von Bertalanffy generalizado como um PVI fuzzy, do tipo *fuzziness ambiental* (incerteza nos parâmetros) [1], aplicamos o princípio de extensão de Zadeh [14] à solução determinística obtida através da resolução clássica, obtendo a solução fuzzy.

Solução fuzzy do Modelo generalizado

Considerando a solução determinística do modelo de von Bertalanffy generalizado

$$p_t(p_0, \beta, \gamma, p_\infty) = p_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{p_0}{p_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) \cdot e^{-\beta(1-\gamma)t} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \right\}, \quad (12)$$

os α -níveis da solução fuzzy, considerando o caso em que o parâmetro de alometria é fuzzy, são:

$$[\hat{p}_t(\hat{\gamma})]^\alpha = p_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{p_0}{p_\infty} \right)^{1-[\hat{\gamma}]^\alpha} - 1 \right) \cdot e^{-\beta(1-[\hat{\gamma}]^\alpha)t} \right]^{\frac{1}{1-[\hat{\gamma}]^\alpha}} \right\}. \quad (13)$$

Retomando a expressão determinística para p_∞

$$p_\infty(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

podemos observar que considerar qualquer um dos parâmetros α , β ou γ fuzzy é equivalente a tomar p_∞ desta forma, uma vez que são interdependentes.

Nas soluções fuzzy optamos por fuzzificar o parâmetro de alometria, devido ao fato de acreditarmos que por este ser um parâmetro relacionado à área corporal, talvez seja mais coerente que cada espécime possua um valor próprio.

A solução fuzzy obtida pela extensão de Zadeh de (12) aplicada à suínos, utilizando $\hat{\gamma} = (0.9787/0.9794/0.9799)$, pode ser vista na Figura 4. Na Figura 5 podemos observar a comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e da solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado.

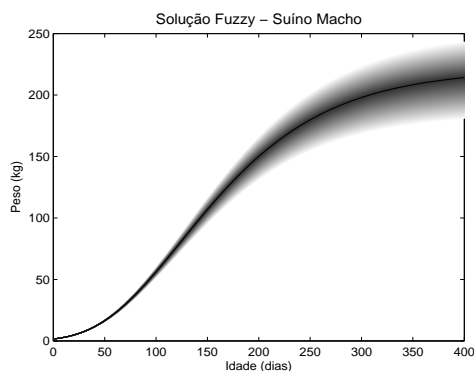


Figura 4: Solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado, com o parâmetro alométrico fuzzy: $\hat{\gamma} = (0.9787/0.9794/0.9799)$.

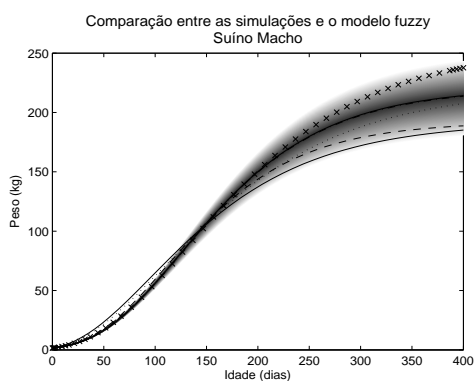


Figura 5: Comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e do modelo fuzzy da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado.

Conclusão

Conforme esperado, o modelo mostrou-se adequado para relacionar peso e idade, principalmente por possuir parâmetros com interpretação biológica, que têm fundamental importância para ressaltar características relevantes do crescimento, como por exemplo o parâmetro de catabolismo β , que mede o gasto energético do animal.

A conjectura inicial de que haveria um padrão metabólico por classe animal não se verificou, porém ao considerarmos β variável em relação ao tempo t no decorrer desta verificação, foi possível estimar o comportamento metabólico individual de cada espécime, bem como notar a ocorrência de tendências em comum para animais de classe distintas.

Conforme podemos observar na Figura 5, a solução fuzzy do modelo estima com graus de pertinência em relação à curva do modelo determinístico, inserindo assim, as variações que de fato ocorrem nos dados reais e no decorrer do processo de modelagem, imprimindo maior confiabilidade à solução obtida.

Uma vez que a qualidade do ajuste de um modelo a uma espécie animal é, entre outros fatores, dependente do número de pares de peso e idade avaliados, do sexo, da raça, do manejo e da idade do animal em que os últimos pesos são obtidos, a expectativa é de que as estimativas de parâmetros obtidas neste trabalho sejam usadas como valores iniciais em situações específicas daqueles que a utilizarem, bem como em trabalhos futuros.

Referências

- [1] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. Coleção IMECC. Textos didáticos, v.5. Campinas, Sp.
- [2] Bertalanffy, L. (1938) A quantitative theory of organic growth, Human Biology, n. 10, v. 2, p. 181-213.
- [3] Chávez E. A. (1973). "Estudio sobre la tasa de crecimiento del camarón blanco (*Pennaeus vannamei* Boone) de la Región Sur del Golfo de California"; *Ciencia Pesquera*, XXVIII (2), México, p. 79-85.
- [4] Freitas, A. R. (2007). Estimativas de curvas de crescimento na produção animal. Embrapa Pecuária Sudeste. Documentos, 68.
- [5] Guedes, M. H. P. et al (2004). Estudo das curvas de crescimento de cordeiro das raças Santa Inês e Bergamácia considerando heterogeneidade de variâncias. *Ciência e Agrotecnologia*, Lavras, v. 28, nº 2, p. 381-388.
- [6] Leite, A. L. F. (2003). Modelagem matemática aplicada ao crescimento em peso de aves de corte. Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, UFOP, Ouro Preto/MG.
- [7] Oliveira, L. et al (2007). Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte. *Revista Biomatemática* 17, p. 101-109, Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC - UNICAMP.
- [8] Pereira, C. S. (2000). Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Brasília, v. 35, n. 9, p. 1843-1851.
- [9] Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Contexto, São Paulo.
- [10] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra, São Paulo.
- [11] Rodrigues, M. L. et al (2007). Curva de Crescimento em rã-touro na fase de recria. *Archivos de Zootecnia* v. 56, n. 214, p. 125-136.
- [12] Walford, L. A. (1946). A new graphic method of describing the growth of animals. *Biological Bulletin*, v. 90, n. 2, p. 141-147.
- [13] West. G. B., Woodruff, W. H., e Brown, J. H. (2002). Allometric scaling of metabolic rate from molecules and mitochondria to cells and mammals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United of American*, v. 99, p. 2473-2478.
- [14] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, Berkeley, Califórnia, v.8, p. 338-353.