

Precondicionadores e solucionadores para problemas de reservatório

Luiz Mariano Carvalho,

UERJ - Depto de Matemática Aplicada, IME
20550-013, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: luizmc@gmail.com

Wagner R. Fortes

UERJ - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
20940-903, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: wfortes@gmail.com

Norberto Mangiavacchi

UERJ - Departamento de Mecânica, FEN
20940-903, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: norberto.mangiavacchi@gmail.com.

Resumo: São apresentadas uma breve descrição da formulação matemática e discretização das equações de Navier-Stokes, para escoamento de fluidos destinado a enchimento de reservatórios com transporte de escalares.

Após a discretização espacial e temporal das equações é necessário uma forma de resolução eficiente dos sistemas de equações algébricas lineares gerados, para que possa ser validada a formulação do problema e para que se possa ter uma simulação de qualidade. Assim, descrevemos em detalhes a utilização da combinação de solucionadores, preconditionadores e reordenamentos utilizados para a resolução destes sistemas. São utilizadas abordagens acopladas e segregadas com diversas formas de aproximação e utilização de preconditionadores e reordenamentos em blocos apropriados para o problema de ponto de sela tratado.

Após mais de 2.000 testes, apresentamos alguns dos mais significativos resultados envolvendo diversas comparações.

1 Descrição do modelo

Principais equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de um fluido e os comportamentos dos componentes dentro de um reservatório de água, as equações diferenciais

parciais não lineares de Navier-Stokes, são apresentadas em sua forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \nu_t (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} c$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

onde \mathbf{u} , p são vetores que representam a velocidade e a pressão, respectivamente. Re é o número de Reynolds, Fr é o número de Froude e ν_t é a viscosidade efetiva adimensional.

A hidrodinâmica e o transporte de escalar [2, 9] em sua forma adimensional são dados por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \frac{1}{Re Sc} \nabla \cdot D_t \nabla c + S,$$

onde c é o escalar que sofre advecção, Sc é o número de Schmidt, D_t é difusividade efetiva adimensional e S é um termo fonte.

A malha tridimensional foi construída com elementos finitos do tipo mini-elemento, tetraedros irregulares cujos nós estão associados às variáveis de velocidade e pressão e o centróide está associado apenas à variável de velocidade.

A estratégia utilizada para a discretização espacial das equações foi a utilização do método de Galerkin obtendo as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$M \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{Re} K \mathbf{v} - G p = 0$$

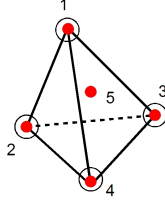


Figura 1: Mini-elemento com 5 pontos de velocidade e 4 de pressão.

$$D\mathbf{v} = 0$$

$$M_c \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re Sc}} K_c c = 0.$$

Para a discretização temporal utilizou-se um método semi-lagrangeano que nos fornece as seguintes equações

$$M \left(\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\delta t} \right) + \frac{1}{\text{Re}} K \mathbf{v}^{n+1} - G p^{n+1} = 0$$

$$D \mathbf{v}^{n+1} = 0$$

$$M_c \frac{\mathbf{c}_i^{n+1} - \mathbf{c}_d^n}{\delta t} + \frac{1}{\text{Re Sc}} K_c c^{n+1} = 0.$$

Tais equações podem ser descritas em forma matricial como segue

$$\begin{pmatrix} A & G \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \mathcal{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

$$K_c \mathbf{c} = \mathbf{b}_3,$$

em que foram renomeadas as matrizes e vetores para simplificar a notação onde, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G, D^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $n \geq m$. As incógnitas u representam velocidade e p representam pressão em cada ponto. Vetores \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 compõem o vetor do lado direito constante. A matriz \mathcal{A} é conhecida como matriz de ponto de sela [3].

2 Estratégias de solução

É comum a utilização do método segregado baseados em decomposição LU que permitem o desacoplamento entre velocidade e pressão

$$\mathcal{A} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & -D\tilde{A}^{-1}G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{-1}G \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (2)$$

onde \tilde{A}^{-1} é uma aproximação para A^{-1} que é, possivelmente, fácil de obter. Através desta abordagem, algumas equações precisam ser resolvidas:

1. $A\delta\mathbf{u} = \mathbf{b}_1$;
2. $-D\tilde{A}^{-1}G\mathbf{p} = \mathbf{b}_2 - D\delta\mathbf{u}$;
3. $\mathbf{u} = \delta\mathbf{u} - \tilde{A}^{-1}G\mathbf{p}$;

onde δu é uma variável auxiliar, A é uma matriz simétrica ($A = A^T$) e positiva definida ($x^T A x > 0 \forall x \neq 0$) e $S = -DA^{-1}G$, matriz conhecida como complemento de Schur de \mathcal{A} em A , é assimétrica. Este método é chamado de método da projeção [4].

Para resolver a equação 1 pode-se utilizar o gradiente conjugado preconditionado (PCG) [8, 11], um eficiente algoritmo para solução de sistemas cuja matriz é simétrica e positiva definida.

Para resolver a equação 2, após montar a matriz, pode-se utilizar o GMRes [13] ou Bi-CGStab [14] preconditionados. Estes são métodos baseados em projeção no espaço de Krylov que solucionam sistemas lineares não simétricos.

Em alguns casos não é construída uma aproximação para a inversa da matriz A , pode-se aproximar o complemento de Schur ou determinar uma forma de resolver este sistema, nestes casos é necessário que se resolva o sistema

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}_1 - G \mathbf{p}, \quad (3)$$

ao invés de resolver a equação 3.

Mesmo nos casos em que aproxima-se a inversa de A , poderíamos tentar melhorar a qualidade da solução resolvendo o sistema 3 porém, esta abordagem não é eficiente pois \mathbf{p} obtida do sistema 2 já contém muitos dígitos contaminados.

Adiante serão apresentadas diversas abordagens que possibilitam a resolução do sistema linear para o complemento de Schur.

A resolução do sistemas $\mathcal{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ pelo método segregado visa trabalhar com sistemas lineares de dimensão menor no entanto, recai-se na necessidade de criar uma boa estratégia para resolver o sistema para o complemento de Schur. Sendo assim, iremos considerar a possibilidade de resolver o problema na sua forma acoplada (sem utilizar a decomposição por blocos).

Para resolver o sistema acoplado precisamos utilizar um solucionador para sistemas não simétricos que escolhemos para teste o GMRes e o Bi-CGStab. Apesar de o GMRes

ser robusto enfrenta sérios problemas de convergência. Para tentar garantir a convergência e de forma rápida utilizaremos diversos preconditionadores incluindo os clássicos e preconditionadores apropriados a problemas de ponto de sela.

3 Precondicionamento

Pode-se considerar o precondicionamento como qualquer alteração feita no sistema original tal que o novo sistema seja equivalente ao anterior, tenha a mesma solução, porém seja mais fácil de solucionar. Em geral o precondicionamento é feito através de um preconditionador, uma matriz M responsável pela transformação do sistema. O precondicionamento pode ser feito pela esquerda

$$M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b},$$

ou pela direita

$$AM^{-1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad \text{onde} \quad \mathbf{x} = M^{-1}\hat{\mathbf{x}}.$$

Pode-se também, utilizar a combinação dos dois. A idéia do precondicionamento é trivial porém a escolha de um bom preconditionador não é. A aplicação de um preconditionador, na realidade, se resume a resolução de um sistema linear por iteração para o resíduo como lado direito.

Segue abaixo uma breve descrição dos preconditionadores clássicos utilizados para resolver o sistema acoplado sem considerar sua estrutura de ponto de sela

1. Diagonal

\tilde{A} é uma matriz diagonal composta pela diagonal de A .

2. Lumped

\tilde{A} é uma matriz diagonal que aproxima A como :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ii} &= \sum_{n=1}^j a_{ij} \\ \tilde{a}_{ij} &= 0 \quad \text{se} \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Esta aproximação é feita somando-se todas as entradas de cada coluna no elemento da diagonal. Este preconditionador é facilmente aplicável por ser diagonal.

3. ILU(0)

Para utilizar uma decomposição LU como preconditionador de forma eficiente é necessário aproximar os fatores triangulares. Um critério comum para aproximação dos fatores é utilizar um conjunto S pré definido que define os elementos que devem ser anulados.

O critério de aproximação é

$$\begin{aligned} l_{ij} &= 0 \quad \text{se} \quad j > i \quad \text{ou} \quad (i, j) \notin S \\ u_{ij} &= 0 \quad \text{se} \quad i > j \quad \text{ou} \quad (i, j) \notin S. \end{aligned}$$

Para o ILU(0) (LU de nível zero), o conjunto S é definido de forma estática como

$$S = \{(i, j) | a_{ij} \neq 0\}.$$

4. ILUT(τ)

O LU incompleto com limitante τ ou ILUT(τ), onde τ é um parâmetro pré definido, utiliza o conjunto S que é construído de forma dinâmica, onde os elementos que são, em módulo, menores que o limitante são descartados.

3.1 Utilizando a estrutura de ponto de sela

Considerando a estrutura de ponto sela dispõem-se de outros preconditionadores.

1. Uma alternativa é utilizar o lado direito de (2) como preconditionador para resolver o sistema acoplado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em que é utilizado um solucionador baseado em subespaço de Krylov. Estamos utilizando o método da projeção como preconditionador para o problema acoplado
2. Em [10] é proposto um preconditionador diagonal em blocos para o problema acoplado. matricialmente podemos representá-lo por

$$P_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & DA^{-1}G \end{pmatrix}. \quad (4)$$

A matriz preconditionada $P_1^{-1}A$ tem apenas três autovalores distintos: 1 e $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Isto implica que o polinômio minimal tem grau 3, que garante a convergência dos

métodos baseados em espaço de Krylov em no máximo 3 iterações (para matrizes não singulares), em aritmética exata.

A aplicação deste preconditionador permite o desacoplamento das incógnitas e gerando dois sistemas lineares que devem ser resolvidos para o resíduo como lado direito, para cada iteração do solucionador utilizado.

- (a) $Az_1 = r_1$
- (b) $DA^{-1}Gz_2 = r_2$

Neste caso, na equação 2a aplicamos o PCG com preconditionador Cholesky incompleto (ICC), caso particular do ILU para matrizes simétricas e positiva definidas. Para a equação 2b é necessário utilizar uma aproximação ou método que possibilite resolver tal equação, no caso de utilizar uma aproximação aplicamos o GMRes com o preconditionador ILUT(τ).

3. Em [10] é proposto um preconditionador diagonal em blocos para o problema acoplado. matricialmente podemos representá-lo por

$$P_2 = \begin{pmatrix} A & G \\ 0 & DA^{-1}G \end{pmatrix}. \quad (5)$$

A matriz preconditionada $P_2^{-1}A$ tem apenas dois autovalores distintos: ± 1 . Isto implica que o polinômio minimal tem grau 2, que garante a convergência dos métodos baseados em espaço de Krylov em no máximo 2 iterações (para matrizes não singulares), em aritmética exata.

A aplicação deste preconditionador permite o desacoplamento das incógnitas e gerando dois sistemas lineares que devem ser resolvidos para o resíduo como lado direito, para cada iteração do solucionador utilizado.

- (a) $DA^{-1}Gz_2 = r_2$
- (b) $Az_1 = r_1 - Gz_2$

Neste caso, na equação 3b aplicamos PCG com o preconditionador ICC. Para a equação 3a é necessário utilizar uma aproximação ou método que possibilite resolver tal equação, no caso de utilizar uma

aproximação aplicamos o GMRes com o preconditionador ILUT(τ).

3.2 Como solucionar o sistema do complemento de Schur?

Com o intuito de solucionar a equação 1 pelo método segregado é necessário que aproxime-se a inversa de A ou do complemento de Schur ou que utilize uma estratégia de resolução. Assim, cinco abordagens são apresentadas e implementadas:

1. Aproxima-se a inversa de A pela inversa da diagonal de A .
2. Aproxima-se a inversa A pela inversa da aproximação Lumped de A .
3. Utilizando solucionadores do tipo CGLS.

Com o intuito de não aproximar A^{-1} , resolveremos o sistema subdeterminado

$$D\bar{p} = \bar{b}_2$$

onde \bar{p} é $A^{-1}Gp$.

Para resolver este sistema, utilizamos o gradiente conjugado adaptado a equações normais de forma a minimizar o erro, sendo chamado de CGNE. Utilizar este método é equivalente a resolver $DD^T\bar{p} = \bar{b}_2$ com CG.

Então, precisamos resolver o seguinte sistema sobredeterminado

$$Gp = A\bar{p}$$

Para resolver este sistema, utilizamos o gradiente conjugado adaptado a equações normais de forma a minimizar o resíduo, sendo chamado de CGNR. Utilizar este método é equivalente a resolver $G^T Gp = A\bar{p}$ com CG.

Estes métodos são chamados de CGLS (Conjugate Gradient to Least Square) [1]. Esta abordagem não aproxima o complemento de Schur, é uma forma de resolver o sistema sem aproximar qualquer matriz.

Neste caso é necessário resolver a equação (3) ao invés de 3, onde utilizamos o PCG com preconditionador ICC que foi utilizado para resolver a equação 1.

4. Probing

Ao tentar criar uma aproximação para o complemento de Schur pelo uso da captura dos elementos por vetores de sonda [12] utilizamos esta técnica de forma simples.

Fizemos a multiplicação GW , onde W é a matriz composta pelos vetores de sondagem determinados. Assim, precisamos resolver o seguinte sistema de múltiplos lados direitos

$$AF = GW.$$

Para resolver esta equação, utilizamos os fatores de Cholesky criados como preconditionadores para a equação 1. Agora basta resolver o sistema $-DF = \bar{b}_2$ na qual utilizamos o GMREs com preconditionador ILU.

Neste caso, é necessário resolver a equação (3) ao invés de 3, em que utilizamos o PCG com preconditionador ICC gerado para solucionar a equação 1.

5. Matriz completa aproximada (MCA)

Construímos uma aproximação para o complemento de Schur utilizando resolução de sistemas de múltiplos lados direitos.

Para calcular $A^{-1}G$ precisamos resolver o sistema

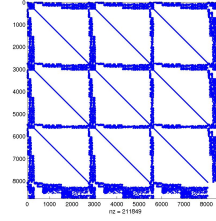
$$AF = G$$

onde F é uma matriz incógnita com as mesmas dimensões de G . Então, fazemos a multiplicação $-DF$ para obter a aproximação desejada.

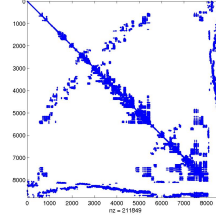
Esta aproximação tem alto custo pois precisa resolver muitos sistemas e cria uma matriz densa que precisa ser esparsificada. Para resolver estes sistemas utilizamos os fatores de Cholesky criados como preconditionadores para resolver o sistema 1.

Como método de esparsificação estamos anulando os elementos menores, em módulo, que um determinado parâmetro relativo τ .

Neste caso, é necessário resolver a equação (3) ao invés de 3, em que utilizamos o PCG com preconditionador ICC gerado para solucionar a equação 1.



(a) Sem reordenamento.



(b) Reordenamento AMD.

Figura 2: Exemplos reordenamento e matriz de ponto de sela.

3.3 Reordenamento

Para realizar as fatorações LU necessárias nos diversos testes é essencial a utilização de reordenamentos eficientes para minimizar preenchimento nos fatores. Assim, utilizamos a permutação “column approximate minimum degree” (AMD) [7] ou “symmetric reverse Cuthill-McKee” (SRCM) [5].

Para obter vantagem da estrutura de ponto de sela fizemos o reordenamento em blocos da seguinte forma. Reordenamos a matriz simétrica A

$$\bar{A} = PAP^T,$$

onde \bar{A} é a matriz A permutada de forma simétrica, P permuta as linhas e P^T as colunas.

Aplicamos então um reordenamento simétrico na matriz do complemento de Schur. De acordo com este último reordenamento, reordenamos as matrizes D e G .

4 Resultados numéricos

Para os diversos testes realizados, foram obtidos resultados sobre

1. Tempo de construção dos preconditionadores, em segundos;
2. Tempo de resolução dos sistemas lineares, em segundos;

3. Erro da solução;

4. Número de iterações.

Para o cálculo do erro, não utilizamos matrizes muito grandes para que os sistemas pudessem ser resolvidos por um método direto e aplicado refinamento iterativo para tentar garantir qualidade a solução. Esta solução foi tomada como exata para o sistema e a partir dela calculamos o erro relativo pela norma Euclidiana dos métodos testados.

Devido aos tamanhos de matrizes utilizados, a diferença entre os dois reordenamentos foi muito pequena oferecendo uma ligeira vantagem ao SRCM, o único apresentado aqui. É notável que a utilização de qualquer um destes reordenamentos foi responsável por uma melhoria de 80 vezes no tempo de solução de sistemas com o uso do método segregado.

Utilizamos o solucionador GMRes com preconditionamento pela esquerda e pela direita, ambos sem “restart”e, assim como no Bi-CGStab, com número máximo de 200 iterações.

Como em todos os testes o método segregado apresentou qualidade de solução bem inferior aos acoplados, utilizamos o refinamento iterativo para melhorar a acurácia que foi chamado de ABLUF (referindo-se a uma aproximação da fatoração LU em blocos). Utilizamos um máximo de 5 iterações.

Consideramos em todos os testes a tempo de solução de apenas um sistemas linear (um passo de tempo).

Utilizamos todas as combinações apresentadas e apresentaremos resultados de simulações em tridimensionais realizadas em Matlab 7, em AMD X2 4200+ (dual core - 1024MB de cache), com 4Gb of RAM.

1. canal com matiz de tamanho 42.630 com 0.072% de elementos não nulos,
2. canal com degrau com matiz de tamanho 42.630 com 0.072% de elementos não nulos,
3. reservatório com matiz de tamanho 34,578 com 0.085% de elementos não nulos.

Estes resultados poderão ser vistos aqui em 4 tabelas comparativas. Outras comparações com variação de refinamento de malha e detalhamento dos testes e resultados poderão ser encontrados em [6]

Problema	Solucionador	Precond	Aprox.	T.Prec.	T.Sol.	Erro
Canal	PD-GMRes	Proj.	diagonal	3,30	8,20	3,1e-8
	PD-GMRes	MGW 2	lumped	3,13	9,01	6,3e-8
Degrau	PD-GMRes	Proj.	diagonal	3,30	8,85	9,9e-9
	PD-GMRes	MGW 2	lumped	3,12	9,08	1,2e-7
Reserv.	PE-GMRes	MGW 2	lumped	2,04	9,35	8e-6
	PE-GMRes	Proj.	diagonal	2,19	9,30	4,6e-6

Figura 3: Melhores tempos para cada problema tratado, CFL=1

Problema	Solucionador	Precond	Aprox.	T.Prec.	T.Sol.	Erro
Canal	Bi-CGStab	Proj.	lumped	0,49	1,17	1,4e-7
	PD-GMRes	Proj.	diagonal	0,49	1,22	9e-8
Degrau	PD-GMRes	MGW 2	lumped	3,41	12,1	3,3e-8
	Bi-CGStab	MGW 1	lumped	3,42	12,2	2,9e-8
Reserv.	PE-GMRes	MGW 2	lumped	2,10	12,8	3e-5
	PE-GMRes	Proj.	diagonal	2,25	12,4	3,6e-5

Figura 4: Melhores tempos para cada problema tratado, CFL=5

A utilização do aproximação por probing não proporcionou convergência devido a forma incoerente utilizada, porém técnicas de probing mais avançadas podem ser utilizadas.

Para a forma de resolução do sistema do complemento de Schur do tipo CGLS consumiu muito tempo e não apresentou solução de qualidade.

Para o método acoplado os preconditionadores diagonal e lumped não geraram soluções de qualidade pois são preconditionadores muito simples para o problema tratado.

Considerando o tempo despendido na construção do preconditionador e na resolução de um sistema linear as tabelas 3 e 4 apresentam os dois melhores resultados para cada problema tratado com CFL=1 e CFL=2, respectivamente.

Na tabela 3, há a predominância do GMRes com preconditionamento de direita, mas existe uma significativa variação na combinação solucionador-preconditionador. É notável que não existe uma diferença significativa entre os dois melhores resultados apresentados para cada problema em termos de tempo gasto e acurácia da solução.

A tabela 4 apresenta grande variação de solucionadores e preconditionadores, mas para CFL 1 and 5, houve uma concordância com respeito ao problema de reservatório. Como na outra tabela, não existe uma diferença significativa entre os dois melhores resultados.

Método	Solucionador	Precond	Aprox.	T.Sol	Erro
Segregado	Proj.	ICC & ILU	lumped	0,24	1,14e-2
	ABLUF		lumped	1,01	2,8e-4
Acoplado	Bi-CGStab	ILUT(10^{-3})	***	1,14	1e-8
	Bi-CGStab	Proj.	diagonal	2,41	8,2e-9

Figura 5: Reservatório, sem refinamento

Método	Solucionador	Precond	Aprox.	T.Sol	Erro
Segregado	Proj.	ICC & ILU	lumped	0,94	8,6e-2
	ABLUF		lumped	5,54	2,2e-3
Acoplado	Bi-CGStab	ILUT(10^{-3})	***	11,5	1,1e-6
	PD-GMRES	ILUT(10^{-3})	***	11,8	6,2e-7

Figura 6: Reservatório, com refinamento

As tabelas 5 e 6 mostram, em primeiro a melhor solução e em segundo a melhor acurácia de solução para os métodos segregado e acoplado para o problema de reservatório com malha padrão e com refinamento da malha. Estas tabelas mostram que o método segregado, mesmo o ABLUF, geraram baixa qualidade se solução contrastando com o método acoplado.

Em geral, o preconditionador $ILU(10^{-3})$ para o problema acoplado é o mais rápido para a resolução dos sistemas, mas este preconditionador leva muito tempo para ser construído.

Está claro que o melhor preconditionador para os problemas tratados não está bem determinado. Muitas combinações apresentam bons resultados em termos de velocidade e convergência. Dependendo da qualidade de solução que se espera obter, deve-se ponderar sobre o tempo disponível que pode ser gasto.

Referências

- [1] R, Barrett and M, Berry and T, F, Chan and J, Demmel and J, Donato and J, Dongarra and V, Eijkhout and R, Pozo and C, Romine and H, Van der Vorst, Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, *SIAM press*, 1994.
- [2] G, K, Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, *Cambridge Mathematical Library*.
- [3] M, Benzi and G, H, Golub and J, Liesen, "Numerical solution of saddle point problems", *Acta Numerica*, 14:1–137, 2005.
- [4] A, J, Chorin, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation*, 22:745–762, 1968.
- [5] E, Cuthill and J, McKee, "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices", In *Proc, 24th Nat, Conf, ACM*, pages 157–172, 1969.
- [6] W, R, Fortes, "Comparação de preconditionadores para simulação de enchimento de reservatórios", Dissertação de Mestrado, PPG-EM - UERJ, 2008.
- [7] A, George and J, W, Liu, "The evolution of the minimum degree ordering algorithm", *SIAM Review*, 31(1):1–19, 1989.
- [8] M, Hestenes and E, Stiefel, "Methods of conjugate gradients for solving linear systems", *J, Res, Nat, Bur, Stand*, 49:409–436, 1952.
- [9] E, M, Lifshitz and L, D, Landau, Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics) *Butterworth-Heinemann*.
- [10] M, F, Murphy, G, H, Golub, and A, J, Wathen, "A note on preconditioning for indefinite linear systems", *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(6):1969–1972, 2000.
- [11] J, K, Reid, On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations, In J, K, Reid, editor, *Large Sparse Sets of Linear Equations*, pages 231–254, New York, 1971, Academic Press,
- [12] Y, Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, *SIAM*, 2003,
- [13] Y, Saad and M, H, Schultz, "GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM J, Sci, Stat, Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
- [14] H, Van der Vorst, "BICGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of non-symmetric linear systems", *SIAM Journal on Scien, and Stat, Computing*, 13(2):631–644, March 1992.