

Uma Nova Estratégia Lagrangeana para a Simulação Numérica da Injeção de Traçadores em Reservatórios de Petróleo

J. Aquino, F. Pereira, T. Jordem Pereira, H. P. Amaral Souto

Departamento de Modelagem Computacional
Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Caixa Postal 97282, 28630-050 Nova Friburgo, RJ, Brasil

E-mail: jaquino@iprj.uerj.br, pereira@iprj.uerj.br, tjpereira@iprj.uerj.br helio@iprj.uerj.br

A. S. Francisco

Departamento de Ciência dos Materiais
Escola de Engenharia Metalúrgica Industrial de Volta Redonda
Universidade Federal Fluminense
Av. dos Trabalhadores, 420, 27255-250 Volta Redonda, RJ, Brasil
E-mail: afrancisco@metal.eeimvr.uff.br.

Resumo: Neste trabalho novas versões do método *Forward Integral-Tube Tracking (FIT)* são apresentadas e empregadas na resolução do problema do escoamento do traçador passivo em um meio poroso heterogêneo. Este método foi desenvolvido baseado na construção de tubos integrais. Suas principais características são: não faz uso de soluções analíticas do problema de Riemann, possui excelente eficiência computacional e é virtualmente livre de difusão numérica. Resultados numéricos são apresentados com o objetivo de comparar a precisão das soluções fornecidas pelas novas versões na resolução do problema do traçador passivo em reservatórios de petróleo.

Este sistema de equações diferenciais é constituído por um sub-sistema elíptico, que determina a pressão e a velocidade da mistura, e uma equação de transporte, que determina em cada instante de tempo o valor da concentração do fluido injetado (traçador).

Neste trabalho apresentamos o método numérico “Forward Integral-Tube Tracking” (FIT) que será utilizado na resolução do problema do traçador passivo em um meio poroso heterogêneo. Este método não faz uso de soluções do problema de Riemann e baseia-se no emprego dos tubos integrais [5]. Além disso são apresentados alguns resultados comparativos, obtidos mediante o emprego de diferentes versões do método FIT [7].

1 Introdução

Técnicas de injeção de traçadores são bastante utilizadas no estudo de escoamentos em meios porosos heterogêneos, principalmente em problemas relacionados à simulação de escoamentos miscíveis em reservatórios de petróleo e à dispersão de contaminantes em formações geológicas. A injeção de traçador é utilizada, por exemplo, para marcar uma fase num sistema bifásico, a fim de se monitorar o escoamento desta fase no tempo e no espaço. Matematicamente, esse escoamento é modelado por um sistema de equações diferenciais parciais, cujas variáveis dependentes são a velocidade, a pressão e a concentração do traçador.

2 Modelagem determinística

O modelo determinístico adotado considera o escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso heterogêneo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de contorno $\partial\Omega$. Consideramos que o meio poroso é rígido e está saturado por um fluido. Além disso, os efeitos gravitacionais e de capilaridade não são considerados e a porosidade do meio é tida como constante. Uma certa quantidade de um traçador é injetada no fluido que escoar no interior do meio poroso. A concentração total do traçador é baixa o suficiente de modo que o fluido marcado e o residente tenham, em termos práticos, as mesmas proprie-

dades físicas. Neste caso, as saturações relativas de cada fluido são s e $(1 - s)$, para o fluido marcado (traçador) e não-marcado (fluido residente) respectivamente.

Os pontos de Ω são representados pelo vetor posição \mathbf{x} , onde $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.1 Equações governantes

Seja Ω um domínio aberto e limitado em \mathbb{R}^2 , com contorno regular $\partial\Omega$. O sistema desacoplado de equações diferenciais parciais que governam o escoamento de traçadores em um reservatório de petróleo, rígido horizontal Ω , sobre um intervalo de tempo $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$, é descrito pela lei de Darcy juntamente com a hipótese de incompressibilidade do fluido

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}(\mathbf{x})}{\mu} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

e pelo transporte advectivo linear da concentração do traçador

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = 0, \quad (2)$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ e $p = p(\mathbf{x})$ são a velocidade de Darcy e a pressão da mistura fluida. O coeficiente μ representa a viscosidade da mistura e $c = c(\mathbf{x})$ é a concentração do traçador ($0 \leq c(\mathbf{x}, 0) \leq 1$). O tensor $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ representa a permeabilidade absoluta da rocha.

2.2 Condições de contorno e inicial

As Eqs. (1)-(2) são definidas em um domínio limitado retangular $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \subset \mathbb{R}^2$ e um intervalo de tempo $I = [0, T]$, sujeito às seguintes condições de contorno e iniciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= -q, & \text{em } x = 0; y \in [0, L_y] \\ p &= 0, & \text{em } x = L_x; y \in [0, L_y] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{em } y = 0, L_y; x \in [0, L_x]$$

e

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega. \quad (4)$$

Nestas equações, \mathbf{n} é o vetor normal unitário apontando para o exterior da fronteira $\partial\Omega$ e c_0 é o valor da concentração no instante $t = 0$.

As condições representadas pelas Eqs. (3) determinam a injeção de um fluido marcado da esquerda para a direita. Esta injeção é feita a uma razão constante $-q$ através da fronteira vertical posicionada em $x = 0; y \in [0, L_y]$ de Ω e não há fluxo ao longo das fronteiras horizontais posicionadas em $y = 0, L_y; x \in [0, L_x]$.

3 Campos de permeabilidades

Freqüentemente os reservatório de petróleo apresentam heterogeneidades com variação significativa de suas propriedades em função da posição em diferentes escalas. Como não podemos obter diretamente os valores das heterogeneidades multi-escala da rocha porosa em um reservatório ou aquífero, que compõe a região Ω , utilizaremos uma caracterização estatística para o campo de permeabilidades escalar $k(\mathbf{x})$ [6]. Esta caracterização consiste em adotar um modelo probabilístico teórico log-normal para $k(\mathbf{x})$, de modo que ele reproduza de maneira razoável a distribuição estatística dos valores do campo de permeabilidades do meio real.

Desta forma, baseado em [6], consideramos um campo gaussiano $\xi(\mathbf{x}) = \ln k(\mathbf{x})$ caracterizado por sua média estatística $\langle \xi(\mathbf{x}) \rangle = 0$ e sua função de covariância [6]

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{y}) \rangle. \quad (5)$$

Portanto, o campo de permeabilidades escalar aleatório $k(\mathbf{x})$ com distribuição log-normal é dado na seguinte forma

$$k(\mathbf{x}) = k_0 e^{\varphi \xi(\mathbf{x})}, \quad (6)$$

onde k_0 é uma constante e φ é o fator que controla o grau de heterogeneidade do meio.

A média estatística $\langle k(\mathbf{x}) \rangle = \bar{k}$ e o desvio padrão σ do campo de permeabilidades são caracterizados respectivamente pelos coeficientes k_0 e φ . Iremos usar o coeficiente de variação

$$CV = \frac{\sigma}{\langle k(\mathbf{x}) \rangle} \quad (7)$$

como uma medida (sem dimensão física) da heterogeneidade do campo $k(\mathbf{x})$.

Supondo que o campo gaussiano $\xi(\mathbf{x})$ possui uma distribuição estacionária, isotrópica e fractal (auto-similar), a Eq. (5) pode ser expressa pela lei de potência

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-\beta}, \quad \beta > 0. \quad (8)$$

O expoente β , chamado de expoente de Hurst, controla a natureza da heterogeneidade multi-escala do reservatório. Para pequenos valores de β , as heterogeneidades das grandes escalas de comprimento são enfatizadas e o campo se torna localmente mais regular. Para valores maiores de β , obtém-se o caso em que as variáveis aleatórias são fracamente correlacionadas.

4 O método numérico

Nesta seção apresentamos as versões bidimensionais do método Forward Integral-Tube Tracking (FIT) que é utilizado na obtenção da solução aproximada da equação do transporte linear (2) sujeita à condição inicial (4). Este método prescinde da solução de problemas de Riemann e usa a idéia dos tubos integrais introduzida em [5]. Além disso, ele é virtualmente livre de difusão numérica e possui uma excelente eficiência computacional. A primeira versão do método FIT, denominada neste trabalho por FIT-1, foi introduzida em [1] e empregada por [2, 3, 4].

4.1 O método Forward Integral-Tube Tracking (FIT)

Neste método, devemos considerar a equação do transporte linear (2) escrita na sua forma divergente

$$\nabla_{t,\mathbf{x}} \cdot \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{vc} \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (9)$$

sujeita à condição inicial (4)

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}). \quad (10)$$

4.1.1 Discretização temporal

Consideramos que o passo de tempo para o transporte linear não é uniforme, onde o n -ésimo intervalo de tempo é denotado por Δt^n , com $t^0 = 0$. Desta forma, vamos representar o instante t^n como sendo a soma dos intervalos anteriores:

$$t^n = t^0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta t^i \quad (11)$$

onde t^n , com $n \in \mathbb{N}$, é o tempo discreto para o cálculo da solução da equação do transporte linear (2).

4.1.2 Construção dos tubos integrais

Usando a idéia dos tubos integrais no espaço-tempo [5] construiremos, agora, a região no espaço-tempo $Q = \Omega \times [t^n, t^{n+1}]$ para o método FIT. Seja \mathcal{K} um subconjunto de Ω no tempo t^n e defina um subconjunto de $\mathcal{D} = \mathcal{D}^n(\mathcal{K})$ de Q . Para cada $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{K}$, construiremos $\mathbf{y}(\mathbf{x}; t)$ que são as soluções do seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\mathbf{vc}}{c} = \mathbf{v}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \quad (12)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}^n, t^n) = \mathbf{x}^n, \quad (13)$$

e definimos

$$\hat{\mathbf{x}}^{n+1}(\mathbf{x}^n) = \mathbf{y}(\mathbf{x}^n, t^{n+1}). \quad (14)$$

Denotemos, agora, $\hat{\mathcal{K}}$ contido em $\Omega \times \{t^{n+1}\}$ a região fechada com fronteira dada por $\{\hat{\mathbf{x}}^{n+1}(\mathbf{x}^n) : \mathbf{x}^n \in \partial\mathcal{K}\}$. Definimos \mathcal{D} o tubo integral determinado por \mathcal{K} , $\hat{\mathcal{K}}$ e as curvas integrais (12). A Fig. 1 ilustra o tubo integral \mathcal{D} para um domínio bidimensional.

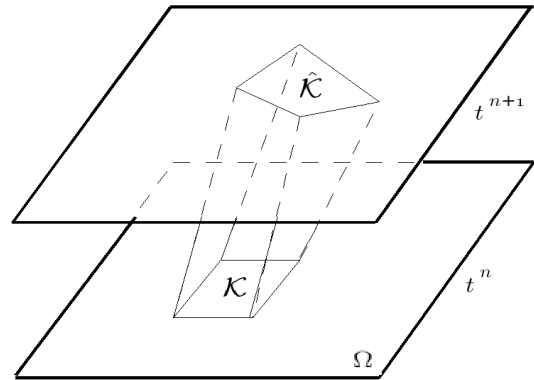


Figura 1: Tubo integral \mathcal{D} para um domínio espacial bidimensional.

Observe que para um passo de tempo (Δt) suficientemente pequeno, a função $\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ é bijetiva. Portanto, esta construção pode ser realizada.

4.1.3 Identidade de Conservação

O método FIT tem como uma de suas características a conservação de massa local. Desta

forma, se definimos $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ como sendo o vetor normal unitário exterior às laterais do tubo integral $\mathcal{D}(\partial\mathcal{D})$ e integrarmos a Eq. (9) sobre \mathcal{D} nós obtemos:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla_{t,\mathbf{x}} \cdot \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}c \end{pmatrix} d\mathbf{x}dt = \int_{\partial\mathcal{D}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} dS =$$

$$= \int_{\hat{\mathcal{K}}} c(\mathbf{x}, t^{n+1}) d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{K}} c(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x} = 0, \quad (15)$$

onde nós empregamos o teorema da divergência. Neste caso, a conservação de massa local é dado por

$$\int_{\hat{\mathcal{K}}} c(\mathbf{x}, t^{n+1}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}} c(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x}. \quad (16)$$

Note que o vetor $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ é ortogonal ao vetor $(c, \mathbf{v}c)^T$ nas curvas laterais de \mathcal{D} (veja o problema de valor inicial (12)-(13)).

4.1.4 O esquema numérico

Na construção numérica de $\hat{\mathcal{K}}$ (veja a Fig. 2 para o caso de um domínio espacial unidimensional) vamos empregar uma família de pontos $\mathbf{x}_i^n, i = 1, \dots, m$ que encontram-se sobre a fronteira $\partial\mathcal{K}$, e a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (12) será aproximada pelo método de Euler :

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \mathbf{v}(\mathbf{x}_i^n) \Delta t^n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

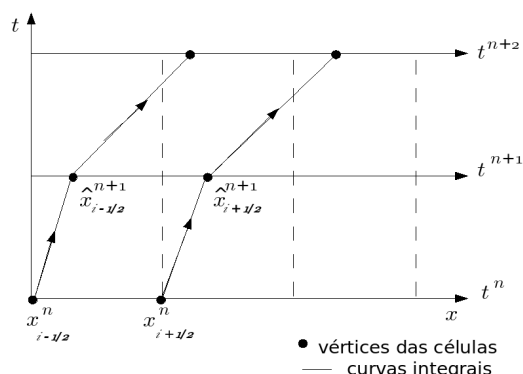


Figura 2: Curvas integrais para um domínio espacial unidimensional.

No caso do transporte advectivo para o traçador passivo, a Eq. (2) é linear e, portanto,

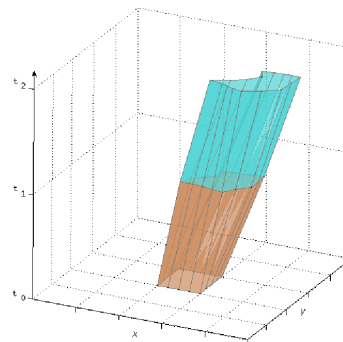


Figura 3: Esquema numérico do tubo integral \mathcal{D} para um domínio espacial bidimensional.

não há cruzamento entre as suas projeções características. Como as curvas integrais apresentadas na Eq. (12) coincidem com as projeções características da Eq. (2), o método FIT permite o uso de passos de tempos longos. Para este problema, a inclinação das curvas integrais não depende da concentração $c(\mathbf{x}, t)$ (vide a Eq. (12)). Logo, as curvas integrais não são afetadas pelas descontinuidades que por acaso vierem a existir na concentração. Portanto, podemos construir numericamente as curvas integrais de forma contínua desde o instante t^n até o instante t^{n+1} , veja a Fig. 3 para o caso de um tubo integral construído numericamente para um domínio bidimensional. Desta forma, como a massa é conservada nos tubos definidos pelas curvas integrais e como, neste caso, o meio é incompressível, espera-se uma concentração constante em cada célula, a menos da difusão numérica (estamos simulando uma descontinuidade de contato). Portanto, o cálculo da concentração, no instante t^{n+1} , resume-se ao cálculo da região $\hat{\mathcal{K}}$ no instante t^{n+1} .

5 Evolução do método FIT

Apresentamos, agora, algumas alterações que foram introduzidas no método numérico FIT original, que resultaram nas versões denominadas de FIT-2, FIT-3 e FIT-4. Estas versões foram desenvolvidas com o objetivo de melhorar os resultados fornecidos pela versão FIT-1, na presença de um campo de permeabilidades com elevado grau de heterogeneidade.

5.1 O método FIT-2

O método numérico FIT-2, introduzido em [7], é uma versão melhorada do método numérico FIT-1 apresentado na Seção 4.1. A diferença entre os dois métodos reside na forma de resolvermos o sistema de equações diferenciais ordinárias (12). No método FIT-2 a solução é aproximada pelo método de Runge-Kutta de terceira ordem [8] enquanto que o FIT-1 emprega o método de Euler. Para uma descrição detalhada do método FIT-2, recomendamos ao leitor a referência [7].

5.2 O método FIT-3

O método FIT-3 combina o método de Euler, utilizado para resolver o sistema (12), com técnicas de inserção e remoção de partículas sobre a frente de avanço do traçador. Estas técnicas, apresentadas em [4], foram desenvolvidas com o objetivo de evitarmos o cruzamento da trajetória das partículas que definem a frente de avanço do traçador.

5.3 O método FIT-4

Finalmente, o método FIT-4 combina os principais atrativos dos métodos FIT-2 e FIT-3. Nele o sistema de equações diferenciais ordinárias (12) é resolvido numericamente pelo método de Runge-Kutta de terceira ordem, e para cada passo de tempo é feito um controle do deslocamento das partículas da frente de avanço do traçador (técnicas de inserção e remoção de partículas). Recomendamos ao leitor a referência [4] para uma discussão mais aprofundada do método FIT-4.

6 Experimentos numéricos

O objetivo desta seção é o estudo comparativo de alguns resultados numéricos, obtidos com os métodos FIT-1, FIT-2, FIT-3 e FIT-4, para a determinação da posição da frente de avanço e a conservação de massa do traçador [7].

6.1 Parâmetros das simulações

As simulações foram realizadas considerando o deslocamento da frente de avanço do traçador para tempos iguais ou menores do que 1250 dias, em uma região física bidimensional com

dimensão $L_x = 512$ m e $L_y = 512$ m, utilizando malha geológica fixa de 512×512 elementos e malha computacional de 512×512 células. Foi levada em consideração a hipótese do desacomplamento das Eqs. (1) e (2), que governam o escoamento de traçadores em um reservatório de petróleo. A Eq. (1) é resolvida apenas uma única vez considerando as condições de contorno (3). Este mesmo campo de velocidades é utilizado na resolução da Eq. (2) durante toda a evolução temporal. A condição inicial adotada para resolver a Eq. (2) é dada pelo seguinte problema de Riemann

$$c(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 32 \text{ m} \\ 0, & \text{se } x \geq 32 \text{ m} \end{cases} \quad (18)$$

Os valores das viscosidades utilizadas são dadas por $\mu(0) = \mu(1) = 1$ cp e a porosidade é mantida constante ($\phi = 0,2$).

Na caracterização da rocha do reservatório, foi considerado um campo escalar de permeabilidades aleatório $k(\mathbf{x})$ com dimensão física $L_x = 512$ m e $L_y = 512$ m, gerados em uma malha computacional de 512×512 células. Este campo possui covariância espacial fractal especificada pela Eq. (6) para $\beta = -0,5$ e $k_0 = 2$ mD.

No conjunto de simulações realizadas, foram analisados os resultados do comportamento da frente de avanço do traçador e a conservação local de massa. As simulações foram realizadas com o grau de heterogeneidade correspondente a um $CV = 0,5$. O número inicial de partículas foi mantido fixo e igual a 256 partículas em todos os casos considerados. Os dados do erro relativo de massa foram calculados para intervalos de 5 dias.

6.2 Análise dos resultados

Nas Figs. 4(a)-4(c) são apresentados os resultados numéricos que representam a frente de propagação do fluido marcado no interior do meio poroso heterogêneo. As posições da frente são mostradas para 300, 600 e 1100 dias de simulação e foram obtidas com os métodos FIT-1 (linha vermelha pontilhada), FIT-2, FIT-3 e FIT-4 (linha contínua azul). No que diz respeito às frentes de avanço, podemos notar que existem pequenas diferenças entre os resultados obtidos com os métodos FIT-2, FIT-3 e FIT-4 quando confrontados com os resultados do

FIT-1. Por outro lado, os resultados são praticamente coincidentes para os métodos FIT-3 e FIT-4.

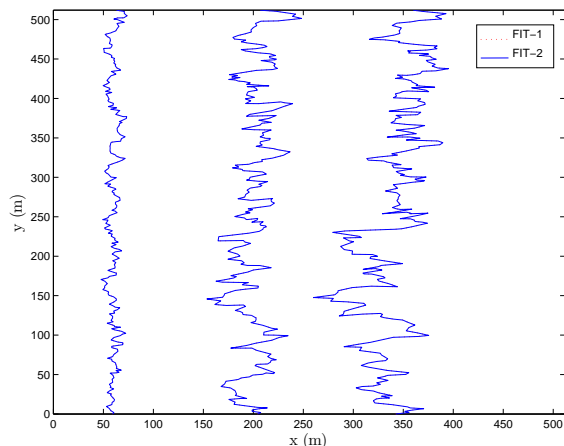
Entretanto, maiores diferenças são obtidas quando consideramos as propriedades dos métodos numéricos quanto à conservação de massa para o problema do traçador passivo. Nas Figs. 5(a)-5(c) são mostrados os resultados de um estudo comparativo dos valores do erro relativo de massa em função da distância percorrida. Destes resultados podemos verificar que a introdução da técnica de inserção e de remoção de partículas foi determinante para que fossem obtidos menores valores para o erro relativo de massa, que são empregadas pelos métodos FIT-3 e FIT-4. Estas técnicas foram capazes de apresentar resultados bastante satisfatórios mesmo com o emprego do método de Euler na resolução do problema de valor inicial, conforme podemos verificar a partir dos resultados mostrados na Fig. 5(b).

A introdução do método de Runge-Kutta de terceira ordem, embora tenha contribuído para uma diminuição do erro relativo, não parece ser o fator decisivo para que obtenhamos os menores valores para o erro relativo de massa, ao menos para os casos estudados neste trabalho.

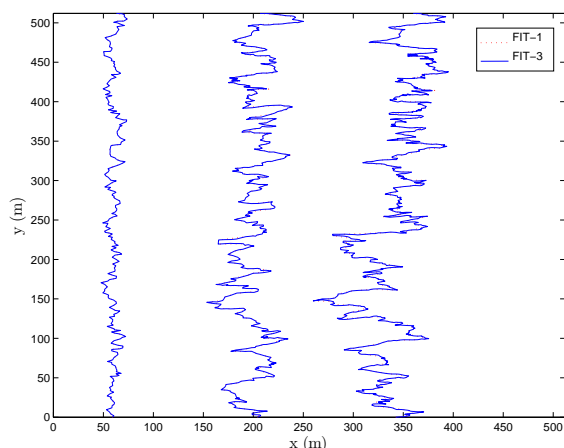
6.3 Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas três novas versões que são extensões do método Forward Integral-Tube Tracking (FIT) original. As diferenças existentes entre estas versões e o método original FIT-1 se devem à introdução do método de Runge-Kutta de terceira ordem, na resolução do problema de valor inicial que define o tubo integral, e da técnica de remoção e inserção de partículas sobre a frente do traçador passivo.

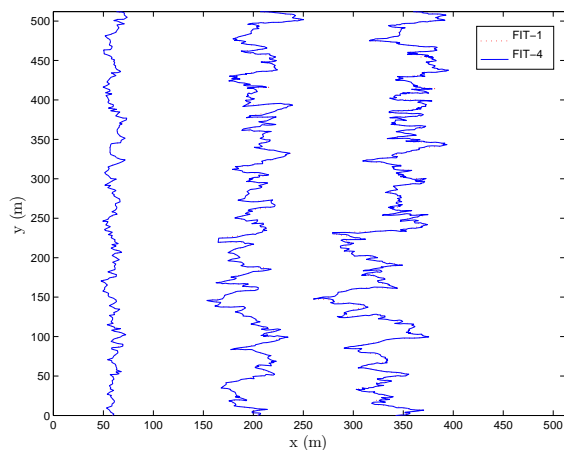
Os resultados apresentados aqui demonstraram a superioridade dos métodos FIT-2, FIT-3 e FIT-4 quando comparados com o método original FIT-1. Embora não tenham sido encontradas grandes diferenças no que diz respeito à forma da frente de avanço do traçador passivo, em um meio heterogêneo caracterizado por um coeficiente de variação igual a 0,5, os valores dos erros relativos de massa são, na média, bem inferiores quando nós resolvemos o problema do traçador passivo empregando as novas versões.



(a) Comparação entre o FIT-1 e FIT-2.



(b) Comparação entre o FIT-1 e FIT-3.

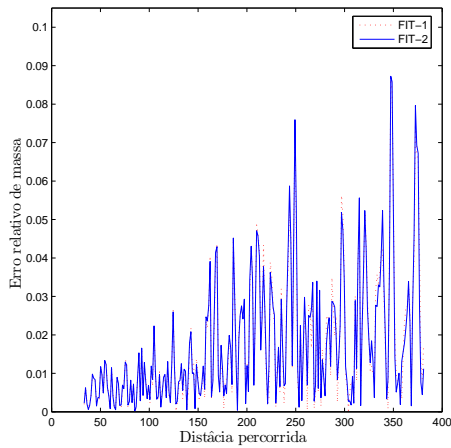


(c) Comparação entre o FIT-1 e FIT-4.

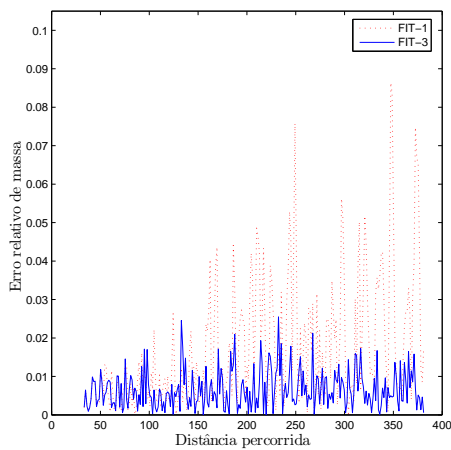
Figura 4: Posição da frente de avanço do traçador para 100, 600 e 1100 dias de simulação e para $CV = 0,5$.

Referências

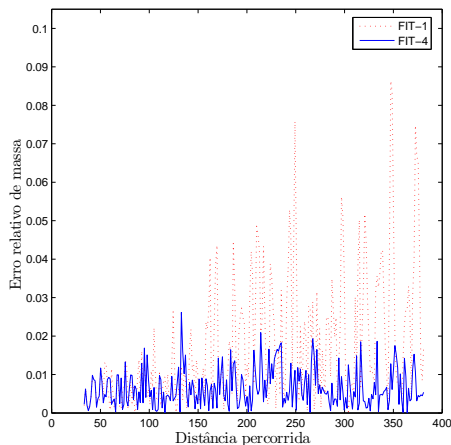
- [1] J. Aquino, A. S. Francisco, F. Pereira and H. P. Amaral Souto, A Forward Tracking Scheme for Solving Radionuclide Advective Problems in Unsaturated Porous Media, *International Journal of Nuclear Energy Science and Tecnology*, 3 (2007) 196-205.
- [2] J. Aquino, A. S. Francisco, F. Pereira and H. P. Amaral Souto, An Overview of Eulerian-Lagrangian Schemes Applied to Radionuclide Transport in Unsaturated Porous Media, *Progress in Nuclear Energy*, (2008) doi:10.1016/j.pnucene.2008.01.001.
- [3] J. Aquino, A. S. Francisco, F. Pereira and H. P. Amaral Souto, A Two-Stage Operator Splitting Algorithm for the Numerical Simulation of Contaminant Transport in Porous Media, *International Journal of Computational Science*, 2 (2008) 442-436.
- [4] J. Aquino, “Simulação Numérica do Transporte de Contaminante em Meio Poroso Heterogêneos Não-Saturados”, Tese de Doutorado, IPRJ-UERJ, 2008.
- [5] J. Douglas, F. Pereira and L. M. Yeh, A locally conservative Eulerian-Lagrangian numerical method and its application to nonlinear transport in porous media, *Computational Geosciences*, 4 (2000) 1-40.
- [6] F. Furtado and F. Pereira, Crossover from nonlinearity controlled to heterogeneity controlled mixing in two-phase porous media flows, *Computational Geosciences*, 7 (2003) 115-135.
- [7] T. Jordem Pereira, “Uma Nova Abordagem Numérica para a Injeção de Traçadores em Reservatórios de Petróleo”, Dissertação de Mestrado, IPRJ-UERJ, 2008.
- [8] A. Kurganov and E. Tadmor, New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-difusion equations, *Journal of Computational Physics*, 160 (2000) 241-282.



(a) Comparação entre o FIT-1 e FIT-2.



(b) Comparação entre o FIT-1 e FIT-3.



(c) Comparação entre o FIT-1 e FIT-4.

Figura 5: Erro relativo de massa para um grau de heterogeneidade dado por $CV = 0,5$.