Injetividade do Funcional Dirichlet-Neumann Elítico via Matemática Intervalar

R. Mendoza **M. Campos**
Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil
E-mail: ramon@dmat.ufpe.br, mac@cin.ufpe.br,

J. Rojas
Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa-PB, Brasil
E-mail: jacq@mat.ufpb.br.

Resumo: *O estudo da injetividade do Funcional Dirichlet-Neumann Elítico, no anel de raios* 1 *e* 2*, está condicionado à existência de uma única solução, de período* 2π*, da equação* $(e^{2y}-1)\lambda = 2y'' - (y')^2$*, onde* λ *é uma função que só depende de* r*. Se* $\lambda \geq 0$ *mostra-se que a única solução dessa equação é* $y = 0$ *para a condição inicial* $y(0) = 0$*. Para* $\lambda < 0$ *mostra-se que também é possível encontrar as soluções. O objetivo deste trabalho é estudar, usando a matemática intervalar, para que valores de* $r > 1$*, a função* λ *é positiva, nula ou negativa. Como conclusões do mesmo, constatou-se que a função* λ *é não negativa para* $1 < r \leq 4.9202261876221005$*, e negativa para* $r \geq 4.9202261876221014$.

1 Introdução

A injetividade do Funcional Dirichlet-Neumann (D-N) Elítico, no anel de raios 1 e 2, está condicionada à existência de uma única solução, de período 2π, da Equação

$$(e^{2y}-1)\lambda = 2y'' - (y')^2, \tag{1.1}$$

onde λ é uma função que só depende de r (cf. (3.13)). Se $\lambda \geq 0$, o Teorema 3.2 mostra que a única solução de (1.1) é $y = 0$ para a condição inicial $y(0) = 0$. Por outro lado, se $\lambda < 0$ H. Araujo e C. Moreira em [3] mostraram, independentemente, um argumento para encontrar as soluções de (1.1).

O objetivo deste trabalho é estudar a injetividade do funcional Dirichlet-Neumann elítico não somente do ponto de vista teórico como também do computacional através da matemática intervalar. Para tanto, este trabalho está organizado como se segue. A Seção 2 introduz o funcional Dirichlet-Neumann elítico. A Seção 3 mostra resultados sobre a injetividade do funcional D-N no caso de variedades compactas com fronteira de dimensão 2 e como a comparação dos núcleos de Schwartz dos operadores associados as métricas, $F^*(e^{2\varphi}u_r)$ e u_r (cf. (3.3)) , implica na Equação (1.1). A Seção 4 mostra, computacionalmente, que a função λ é não negativa para $1 < r \leq 4.9202261876221005$, e negativa para $r \geq 4.9202261876221014$ através da matemática intervalar. E a última seção é a das conclusões.

2 O Funcional D-N Elítico

Sejam Ω uma variedade compacta com fronteira $\partial\Omega$ e $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço de todas as métricas Riemannianas sobre Ω. Denotemos por $\mathcal{O}_p(\partial\Omega)$ o espaço de todos os operadores lineares sobre $C^\infty(\partial\Omega)$.

O funcional Dirichlet-Neumann, $\Lambda : \mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{O}_p(\partial\Omega)$, associa a cada métrica $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ o operador Λ_g sobre $C^\infty(\partial\Omega)$ definido da seguinte forma:

Definição 2.1. *Para cada* $\phi \in C^\infty(\partial\Omega)$ *seja* $u \in C^\infty(\Omega)$ *a única solução da equação* $\Delta_g u = 0$ *tal que* $u_{|\partial\Omega} = \phi$ *onde* Δ_g *denota o operador de Laplace-Beltrami associado à métrica* g*. Assim,*

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_g : & C^\infty(\partial\Omega) & \longrightarrow & C^\infty(\partial\Omega) \\ & \phi & \longmapsto & du(\nu_g) \end{array} \tag{2.1}$$

onde ν_g *denota o campo de vetores normal unitário interior associado à métrica* g*.*

Em [18] e [12] é mostrado que Λ_g é um operador pseudo-diferencial elítico. Mais detalhes sobre a definição de Λ_g podem ser encontrados em [4] e [9].

2.1 O Espaço de Órbitas $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{D}_0 \bowtie \mathcal{C}_0^\infty$

Sejam $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)$ o grupo dos difeomorfismos de Ω, $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ o grupo abeliano das funções infinitamente diferenciáveis sobre Ω. Seja $\mathcal{D} \bowtie \mathcal{C}^\infty$ o produto semi-direto de $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}^\infty$, com o produto $\bullet$ dado por:

$$(F, \alpha) \bullet (H, \beta) = (F \circ H, \beta \circ F^{-1} + \alpha).$$

Este grupo apareceu no trabalho de Polyakov [16] em 1987. Observa-se que é possível definir a seguinte ação a direita do grupo $\mathcal{D} \bowtie \mathcal{C}^\infty$ sobre $\mathcal{M}(\Omega)$

$$g \cdot (F, \varphi) = F^*(e^{2\varphi} g). \tag{2.2}$$

Sejam $\mathcal{D}_0$ o subgrupo de $\mathcal{D}$ formado pelos difeomorfismos cuja restrição a $\partial\Omega$ é a identidade e $\mathcal{C}_0^\infty$ o subgrupo de $\mathcal{C}^\infty$ das funções cuja restrição a $\partial\Omega$ é zero. Verifica-se que $\mathcal{D}_0 \bowtie \mathcal{C}_0^\infty$ é um subgrupo normal de $\mathcal{D} \bowtie \mathcal{C}^\infty$ que age pela direita sobre $\mathcal{M}(\Omega)$ de maneira análoga ao grupo $\mathcal{D} \bowtie \mathcal{C}^\infty$, e que o funcional de Dirichlet-Neumann é constante sobre o espaço de órbitas determinado por esta ação. Araújo-Gómez-Mendoza apresentam em [2] a seguinte conjectura:

$\boxed{\text{CONJECTURA:}}$ Para toda variedade compacta com fronteira Ω, o funcional de Dirichlet-Neumann Λ, induz um funcional $\overline{\Lambda}$ sobre $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{D}_0 \bowtie \mathcal{C}_0^\infty$ que é injetivo.

3 Injetividade do D-N no caso 2-dimendional

Seja Ω uma variedade compacta com fronteira de dimensão 2. Para cada métrica $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, denota-se por $\mathcal{N}_g$ o núcleo de Schwartz do operador Λ_g.

Lema 3.1. *Para toda métrica $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, $F \in \mathcal{D}$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ tem-se que:*
$\Lambda_{F^*e^{2\phi}g} = F^* \circ e^{-\phi} \circ \Lambda_g \circ F^{-1^*}$ *e*
$\mathcal{N}_{F^*e^{2\phi}g}(x, y) = e^{-\phi\circ F(x)} \mathcal{N}_g(F(x), F(y))F'(y)$, *a função $F'(y)$ depende da métrica $g \in \Omega$.*

De fato, fixada a métrica $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, seja E um campo de vetores tangente unitário em relação a métrica g restrita à fronteira de Ω. Então $F'(y)$ no Lema 3.1 denota a única função a valores reais sobre $\partial\Omega$ tal que $F_*E = F'E \circ F$.

Uma consequência deste lema é o corolário a seguir.

Corolário 3.1. *Se $\Lambda_{F^*e^{2\phi}g} = \Lambda_g$ então $e^{-\phi\circ F(x)} = F'(x)$ para $x \in \partial\Omega$.*

A seguir daremos uma descrição do núcleo de Schwartz para uma métrica fixada u_r (cf. (3.1)) no anel A_r. Na Subseção 3.2 será visto que para cada $r > 1$ existe um difeomorfismo H_r que permitirá relacionar duas métricas quaisquer no anel $A_{1,2}$ com a métrica u_r do anel A_r.

3.1 O Núcleo de Schwartz para Métrica u_r no Anel A_r

Seja o anel $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{r} < \|z\| < r\}$, com $r > 1$. Denota-se por $\gamma_{\frac{1}{r}}$ e γ_r, respectivamente, as fronteiras interna e externa do anel A_r. Seja u_r a métrica conforme a métrica Euclidiana sobre A_r definida em coordenadas polares por:

$$u_r = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2) \tag{3.1}$$

onde $z = \rho e^{i\theta}$ com $\frac{1}{r} \leq \rho \leq r$ e $0 < \theta < 2\pi$.

Araújo et al [2] usando resultados em [5], provaram o seguinte lema:

Lema 3.2. *Para u_r em (3.1) tem-se que em γ_r e $\gamma_{\frac{1}{r}}$, respectivamente,*

$$\mathcal{N}_g(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) = \underbrace{H(re^{i\theta}, re^{i\alpha})}_{\text{classe } \mathcal{C}^\infty} - \underbrace{\frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)}}_{\text{parte singular}}$$

e

$$\mathcal{N}_g(r^{-1}e^{i\theta}, r^{-1}e^{i\alpha}) = \underbrace{H(r^{-1}e^{i\theta}, r^{-1}e^{i\alpha})}_{\text{classe } \mathcal{C}^\infty} - \underbrace{\frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)}}_{\text{parte singular}}$$

onde

$$H(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}\ \left\{ B(\theta, \alpha) - \frac{r^{-2}\cos(\theta-\alpha) + r^2\cos(\theta-\alpha) + 2}{(r^{-2} + 2cos(\theta-\alpha) + r^2)^2} \right\} \tag{3.2}$$

com $B(\theta, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n(\theta - \alpha)$ e $b_n = n \cdot \left(\frac{(r^n - (-r)^{-n})^2}{r^n(r^n + (-r)^{-n})} - 1\right)$.

3.2 Conexão entre os Anéis $A_{1,2}$ e A_r

Considere o anel

$$A_{1,2} = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 < \|z\| < 2\},$$

e, para cada $r > 1$, o difeomorfismo

$$\begin{array}{rccl} H_r: & A_{1,2} & \rightarrow & A_r \\ & \rho e^{i\theta} & \longmapsto & \left(\frac{r^2-1}{r}(\rho-2)+r\right)e^{i\theta}. \end{array}$$

Assim fixada a métrica u_r em (3.1), temos a família $\{U_r = H_r^* u_r\}_{r>1}$ de métricas em $A_{1,2}$. Em [2] é indicado que:

Teorema 3.1. *Seja $g \in \mathcal{M}(A_{1,2})$. Então existe $F \in \mathcal{D}^+(A_{1,2})$ e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(A_{1,2})$ tal que $g = F^*(e^{2\varphi}U_r)$ para algum $r > 1$.*

3.3 A Injetividade de D-N e (1.1)

Segue-se um esboço de como Araújo et al [2] chegam à equação $(e^{2y}-1)\lambda = 2y'' - (y')^2$ ao estudar a injetividade do funcional de Dirichlet-Neumann no anel $A_{1,2}$.

Sejam g_1 e g_2 métricas no anel $A_{1,2}$ tais que $\Lambda_{g_1} = \Lambda_{g_2}$. Segue-se do Teorema 3.1 que

$$g_1 = F_1^* e^{2\varphi_1} U_{r_1} \qquad \text{e} \qquad g_2 = F_2^* e^{2\varphi_2} U_{r_2}.$$

Portanto,

$$\Lambda_{F^*(e^{2\varphi}u_r)} = \Lambda_{u_r}, \tag{3.3}$$

com $F \in \mathcal{D}(A_r)$ e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(A_r)$ obtidas a partir de F_1, F_2, φ_1 e φ_2.

Aplicando o Lema 3.1 tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{F^*e^{2\varphi}u_r}(x,y) &= e^{-\varphi\circ F(x)}\mathcal{N}_{u_r}(F(x),F(y))F'(y) \\ &= \mathcal{N}_{u_r}(x,y). \end{aligned}$$

Por outra parte definindo $\mathcal{H}(r,\theta,\alpha)$ por:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}(r,\theta,\alpha) = \\ &\left\{H(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) - \tfrac{2r^2}{(1+r^2)^2}\tfrac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)}\right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

e representando $x = re^{i\theta}$, $y = re^{i\alpha}$ e $F(re^{i\theta}) = re^{if(\theta)}$, segue-se do Lema 3.2 que

$$e^{-\varphi\circ F(re^{i\theta})}\mathcal{H}(r, f(\theta), f(\alpha))f'(\alpha) = \mathcal{H}(r,\theta,\alpha). \tag{3.5}$$

Segue-se do Corólario 3.1 que

$$e^{-\varphi\circ F} = f' \tag{3.6}$$

na fronteira. Assim tem-se de (3.5) e (3.6) que:

$$\mathcal{H}(r, f(\theta), f(\alpha))f'(\alpha)f'(\theta) = \mathcal{H}(r,\theta,\alpha). \tag{3.7}$$

Segue-se da igualdade em (3.7) que as soluções de (1.1) formam um grupo.

Assim de (3.7) temos que:

$$\begin{aligned} &H(re^{if(\theta)}, re^{if(\alpha)})f'(\alpha)f'(\theta) - H(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) = \\ &\mu(r)\underbrace{\left\{\frac{f'(\alpha)f'(\theta)}{1-\cos(f(\theta)-f(\alpha))} - \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)}\right\}}_{(*)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

com $\mu(r) = \frac{2r^2}{(1+r^2)^2}$.

O lado direito da Equação (3.8) é a parte $\mathcal{C}^\infty$ do núcleo de Schwartz, fazendo $\alpha \to \theta$ obtém-se

$$H(r,r)\{[f'(\theta)]^2 - 1\}. \tag{3.9}$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor para a expressão $(*)$ no lado esquerdo da Equação (3.8), para $\alpha \to \theta$, obtém-se

$$\frac{1}{3!}\left\{\left[f'(\theta)\right]^2 - 1 + 2\mathcal{S}(f)\right\}, \tag{3.10}$$

onde $\mathcal{S}(f) = \left[\frac{f''}{f'}\right]' - \frac{1}{2}\left[\frac{f''}{f'}\right]^2$ é a derivada Schwarziana de f, veja Tabachnikov [17], Devaney-Keen [7].

Logo, de (3.9) e (3.10) temos que:

$$\{[f'(\theta)]^2 - 1\}\left\{3!\frac{(1+r^2)^2}{r^2}H(r,r) - 1\right\} = 2\mathcal{S}(f). \tag{3.11}$$

Seja

$$\lambda(r) = 3!\frac{(1+r^2)^2}{r^2}H(r,r) - 1. \tag{3.12}$$

Segue-se do Lema 3.2 que

$$\lambda(r) = \frac{4!}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\right\} - 1, \tag{3.13}$$

onde

$$b_n = n\left\{\frac{-3(-1)^n + \frac{1}{r^{2n}}}{r^{2n} + (-1)^n}\right\}. \tag{3.14}$$

Segue-se das Equações (3.11) e (3.12) que

$$\{[f'(\theta)]^2 - 1\}\lambda(r) = 2\mathcal{S}(f). \tag{3.15}$$

3.4 Soluções de (3.15) para $\lambda \geq 0$

Como $f(\theta + 2\pi) = f(\theta) + 2\pi$, tem-se que

$$\begin{array}{ll} (i) & \int_0^{2\pi} f'(t)dt = f(2\pi) - f(0) = 2\pi \\ (ii) & f'(\theta + 2\pi) = f'(\theta) \end{array}$$

Logo, $f'(\theta)$ é uma função de período 2π. Após fazer a mudança de variáveis $y(\theta) = \ln(f'(\theta))$, a Equação (3.15) é dada por:

$$2y'' - [y']^2 = \{e^{2y} - 1\}\lambda. \quad (3.16)$$

Note que $y(\theta) = 0$ é uma solução da Equação (3.16). De fato, verificaremos a seguir que esta é a única solução satisfazendo $y(0) = 0$.

Teorema 3.2. *Se $\lambda \geq 0$ então $y(\theta) = 0$ é a única solução da Equação* (3.16) *tal que* $y(0) = 0$.

Demonstração. Sabe-se que $e^y = f'$, assim de (i) tem-se $\int_0^{2\pi} e^{y(t)}dt = 2\pi$. Considere o seguinte produto interno em $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi])$:

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_0^{2\pi} f_1 f_2 dt. \quad (3.17)$$

Então aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz a $f_1(t) = e^{y(t)}$ e $f_2(t) = 1$ tem-se

$$2\pi = \int_0^{2\pi} e^{y(t)}dt \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} e^{2y(t)}dt} \cdot \sqrt{2\pi}. \quad (3.18)$$

Ou seja,

$$2\pi \leq \int_0^{2\pi} e^{2y(t)}dt. \quad (3.19)$$

Por outro lado, integrando entre 0 e 2π a Equação (3.16) e observando que $\int_0^{2\pi} y''(t)dt = y'(2\pi) - y'(0) = 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^{2\pi}\{e^{2y(t)} - 1\}dt &= -\int_0^{2\pi}[y'(t)]^2dt. \\ \lambda(\int_0^{2\pi} e^{2y(t)}dt - 2\pi) &= -\int_0^{2\pi}[y'(t)]^2dt \leq 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se λ for positiva segue-se de (3.19) e (3.20) que $\int_0^{2\pi} e^{2y(t)}dt = 2\pi$. Assim vale a igualdade na desiguldade (3.18). Portanto, $e^{y(t)} = c \cdot 1$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e como $1 = e^{y(0)} = c \cdot 1 = c$, conclui-se que $e^{y(t)} = 1$. Portanto, $y(t) = 0$.

Se $\lambda = 0$, segue-se de (3.20) que $\int_0^{2\pi}[y'(t)]^2dt = 0$, assim tem-se que $[y'(t)]^2 = 0$, conseqüentemente $y'(t) = 0$. Logo, $y(t) = c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Portanto, $y(t) = 0$ desde que $y(0) = 0$. □

Como $y(t) = 0$ é a única solução da Equação (3.16), tem-se $f'(\theta) = 1$. Logo F (cf (3.6)) restrita à fronteira exterior é igual a uma rotação, desde que $F(re^{i\theta}) = re^{if(\theta)}$, assim a restrição à fronteira interior, ainda satisfaz a equação porém não é possível fixar o ponto $\frac{1}{r}$.

4 A Injetividade do Funcional D-N Elítico via Estudo Computacional de λ

O Teorema 3.2 estabelece uma condição para a existência de solução única para a Equação (3.16). De fato, deve-se ter $\lambda(r) \geq 0$ (i). Nesta Seção será determinado intervalos onde a condição (i) é verificada e onde não é.

4.1 Convergência de $\lambda(r)$

Seja

$$\lambda_k(r) = \frac{4!}{2}\left\{\sum_{n=1}^{k} b_n(r) - \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\right\} - 1 \quad (4.1)$$

onde k é utilizado no truncamento da série $\sum_{n=1}^\infty b_n(r)$ para a computação da mesma. Através de (4.1) determinou-se uma aproximação para (3.13) e, com isso, testou-se a condição (i) para intervalos de r. Para tal, foi realizado o computo de $\lambda_k(r)$ com a aritmética de ponto flutuante seguido da validação dos resultados através da aritmética intervalar com exatidão máxima [13], [14], [11]. Dado o desempenho e tradição na comunidade científica, a linguagem de programação C++ e a extensão C-XSC [10] – uma biblioteca para o desenvolvimento de algoritmos numéricos com controle automático do erro – foram escolhidas.

Valores obtidos para $\lambda_k(r)$ usando ponto flutuante de precisão dupla (`real` no C-XSC) aparecem na Tabela 4.1. Como pode-se observar,

r	k	$\lambda_k(r)$
2	1	10.0799999999999983
2	2	5.9329411764705871
2	3	7.6561554621848726
2	4	7.0965737501226158
2	29	7.2318213655769936
2	30	7.2318213655769927
2	500	7.2318213655769927

Tabela 4.1: Valores de $\lambda_k(r)$

não há diferença perceptível pela máquina para $k > 29$, fixando-se $r = 2$. Essa velocidade de convergência ocorre para todo $r > 1$ em razão do decrescimento exponencial de (3.14) quando n cresce, implicando um esforço computacional pequeno (30 iterações se $r = 2$) no cálculo de

(3.13) uma vez que não é necessário $k \to \infty$ para $\lambda_k(r) \approx \lambda(r)$. Um outro exemplo aparece na Tabela 4.2. Nesse caso, não há diferença entre os valores de $\lambda_k(r)$ para $k > 201$, fixando-se $r = 1.1$, sendo, então, menor a velocidade de convergência mas, ainda assim, rápida o suficiente para tornar a computação viável. Essa substancial diminuição na taxa de convergência ocorre pois o termo r^{2n} do denominador de (3.14) cresce de forma mais lenta quando r se aproxima de 1, concluindo-se, portanto, que quanto maior o valor de r mais rapidamente (3.13) converge.

r	k	$\lambda_k(r)$
1.1	10	481.8314580818556578
1.1	29	540.1537143859777643
1.1	100	538.2934560312634176
1.1	201	538.2934646559746170
1.1	202	538.2934646559745033
1.1	1000	538.2934646559745033

Tabela 4.2: Mais valores de $\lambda_k(r)$

4.2 Verificação da condição $\lambda(r) \geq 0$

Da Subseção 4.1 torna-se trivial a verificação de (i) para dado r. Com efeito, tomando $r = 1.00001 + h\Delta r$, $h = 0, \cdots, 10^5$, $\Delta r = 1$, $k = 30$ e computando (4.1) observa-se inversão de sinal em $4.00001 \leq r \leq 5.00001$ (como mostrado na Tabela 4.3).

r	$\lambda_k(r)$
3.00001	1.8413746491051708
4.00001	0.5301795392204616
5.00001	-0.0321840114225210
6.00001	-0.3307322281020401
7.00001	-0.5091765887317801

Tabela 4.3: Inversão de sinal de $\lambda_k(r)$

O intervalo onde ocorre a inversão do sinal é de especial interesse desde que é uma fronteira para a condição (i). Para estudá-lo utilizou-se o Algoritmo A_1:

Algoritmo A_1

1. Sejam $I = [4.00001, 5.00001]$, $\epsilon = 10^{-1}$ e $k = 30$
2. Faça $I := \{r \in I \mid a_1 \leq r \leq a_2, \lambda_k(a_1) \geq 0, \lambda_k(a_2) \leq 0, a_2 - a_1 = \epsilon\}$
3. Faça $\epsilon := 10^{-1}\epsilon$
4. Se $\epsilon \geq 10^{-15}$, volte ao Passo 2

A checagem $\epsilon \geq 10^{-15}$ no Passo 4 do Algoritmo A_1 é necessária porque, como o sistema de ponto flutuante é discreto, vai existir um ponto em que ϵ será tão pequeno que não conseguirá diferenciar-se de 0 nas operações, e esse ponto aparece para $\epsilon < 10^{-15}$ pois 15 é o número máximo de dígitos significativos usando-se precisão dupla. A partir do Algoritmo A_1, chegou-se ao menor intervalo detectável pela máquina onde ocorre a inversão de sinal como mostrado na Tabela 4.4.

r	$\lambda_k(r)$
4.9202261876221005	0.0000000000000005
4.9202261876221014	-0.0000000000000003

Tabela 4.4: Menor intervalo detectável onde há inversão do sinal de $\lambda_k(r)$

Portanto, para $1 < r \leq 4.9202261876221005$ a condição (i) constata-se verdadeira, e falsa para $4.9202261876221014 \leq r \leq 10^5$. Além disso, pelo Teorema de Bolzano [1], existe raiz para $\lambda(r)$ no intervalo $[4.9202261876221005, 4.9202261876221014]$.

4.3 Validação dos resultados utilizando matemática intervalar

Após os cálculos efetuados na Subseção 4.2, processou-se a validação dos resultados com a aritmética intervalar de exatidão máxima [13], [14], [11]. A aritmética intervalar é uma ferramenta matemática para a solução de problemas relacionados com erros numéricos baseada em um sistema algébrico formado por todos os intervalos fechados da reta real e por operações definidas sobre ele. Ao invés de algoritmos numéricos usuais, usam-se algoritmos intervalares que produzem intervalos contendo a resposta verdadeira como resultado. A exatidão máxima, por outro lado, fornece um método axiomático para as operações aritméticas realizadas em computadores que captura propriedades essenciais associadas com arredondamentos.

A validação dos resultados foi obtida através do computo de (4.1) como na Subseção 4.2 e de maneira intervalar – usando o toolkit para software numérico C-XSC [10] – seguido da verificação da pertinêcia dos resultados de ponto flutuante nos respectivos resultados intervalares. A seguir aparecem o correspondente intervalar para a Tabela 4.3.

r	k	$\lambda_k(r)$
3.00001	30	[1.8413746491051363, 1.8413746491052048]
4.00001	30	[0.5301795392204420, 0.5301795392204807]
5.00001	30	[-0.0321840114225346, -0.0321840114225081]
6.00001	30	[-0.3307322281020495, -0.3307322281020302]
7.00001	30	[-0.5091765887317873, -0.5091765887317726]

Tabela 4.5: Inversão de sinal de $\lambda_k(r)$ intervalar

Como pode-se observar, todos os valores para $\lambda_k(r)$ da Tabela 4.3 pertencem aos intervalos mostrados na Tabela 4.5. O mesmo ocorre para todos os valores computados neste trabalho e, conseqüentemente, o resultado obtido é confiável.

5 Conclusões

Neste trabalho foi estabelecida a conexão entre a existência de solução única e identicamente nula para a Equação (1.1) e a injetividade do funcional Dirichlet-Neumann em um anel de raios 1 e 2. Além disso, o Teorema 3.2 determinou uma condição para a existência dessa solução. Posteriormente, através do suporte computacional, essa condição constatou-se verdadeira para $1 < r \leq 4.9202261876221005$, e falsa para $4.9202261876221014 \leq r \leq 10^5$ e, usando aritmética intervalar de exatidão máxima, validou-se os resultados concluindo sua confiabilidade. Dessa forma, o objetivo do trabalho foi alcançado.

Referências

[1] T. M. Apostol, "Análisis Matemático", Espanha, Editora Revert, S.A., 1960.

[2] H. Araújo, P. Gómez, R. Mendoza, Uniqueness for the Dirichlet-Neumann Elliptic Functional on the Annulus, *em preparação.*

[3] H. Araújo, C. Moreira, *Comunicação privada.*

[4] T. Aubin, "Analysis on Manifolds", Monge-Ampère Equations, Springer Verlag, 1982.

[5] I. Bârza, D. Guisa, Explicit Formulas for Green's Functions on the Annulus and on the Möbius Strip, *Acta Applicandae Mathematicae* **54** (1998), 289-302.

[6] A. Calderón, On an inverse boundary value problem, *in Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Rio de Janeiro, Editors W.H. Meyer and M.A. Raupp, Sociedade Brasileira de Matematica* (1980), 65-73.

[7] R. Devaney, L. Keen, Dynamics of meromorphic maps: maps wich polynomial Schwarzian derivative, *Annales scientifiques de L'É.N.S.* 4^e serie, tome 22, n^o **1** (1989), 55-79.

[8] P. Gómez, R. Mendoza, Uniqueness for the Dirichlet-Neumann elliptic functional, *Inverse Problem* **22** (2006), 1575-1578.

[9] L. Hörmander, "Linear Partial Differential Operator", Heidelberg: Springer Verlag, 1963.

[10] U. Kulisch et al, "C-XSC: A C++ Class Library for Extended Scientific Computing", Spring-Verlang, Heidelberg, 1993.

[11] U. Kulisch, W. L. Miranker, "Computer Arithmetic in Theory and Practice", New York, Academic Press, 1911.

[12] J. Lee, G. Uhlmann, Determining anisotropic real analytic condutivities by boundary measurements, *Comm. Pure Appl. Math.* **XLII** (1989), 1097-1112.

[13] R. E. Moore, "Interval Analysis", N. J., Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1966.

[14] R. E. Moore, "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM, Philadelphia, Pennsylnia, 1976.

[15] A. Navas, On Uniformly Quasisymmetric Group of Circle Diffeomorphisms, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathemetica* **31** (2006), 437-462.

[16] A. Polyakov, "Gauge and Strings", Chur: Harwood Academic Publishers, 1987.

[17] S. Tabachnikov, On zeros of the Schwarzian Derivative Topics in singularity theory, *AMS. Transl.*, ser. 2, **180** (1997), 229-239.

[18] M. Taylor, "Partial Differential equations, II", Applied Mathematical Sciences 116, Springer, 1996.