Abordagem Computacional da Injetividade do Funcional Dirichlet-Neumann Elítico

R. Barreto **M. Campos** **R. Mendoza**
Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil
E-mail: {rmb3,mac}@cin.ufpe.br, ramon@dmat.ufpe.br,

J. Rojas
Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa-PB, Brasil
E-mail: jacq@mat.ufpb.br.

RESUMO

A injetividade do funcional Dirichlet-Neumann elítico em um anel de raios 1 e 2 tem a ver com a existência de uma única solução, de período 2π, para a equação $2y'' = y'^2 + (e^{2y} - 1)\lambda(r)$, onde

$$\lambda(r) = \frac{4!}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r) - \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\right\} - 1, \quad (1)$$

$$b_n(r) = n\left\{\frac{-3(-1)^n + \frac{1}{r^{2n}}}{r^{2n} + (-1)^n}\right\} \quad (2)$$

com $r > 1$.

Se $\lambda(r) \geq 0$ (i), demonstra-se que a única solução é $y = 0$ se $y(0) = 0$ [1]. Usando-se a função $\lambda_k(r) = \frac{4!}{2}\left\{\sum_{n=1}^{k} b_n(r) - \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\right\} - 1$, é possível, com auxílio computacional, determinar uma aproximação para (1) e, com isso, verificar a condição (i) para intervalos de r. Esse é o objetivo deste trabalho e, para tal foi realizado o computo de $\lambda_k(r)$ com a aritmética de ponto flutuante seguido da validação dos resultados através da aritmética de exatidão máxima. A linguagem de programação C++ e a extensão C-XSC [2] foram escolhidas devido ao desempenho e tradição na comunidade científica.

Valores obtidos para $\lambda_k(r)$ usando ponto flutuante de precisão dupla (`real` no C-XSC) aparecem na Tabela 1. Como pode-se observar, não há diferença perceptível pela máquina para $k > 29$, fixando-se $r = 2$. Essa velocidade de convergência ocorre para todo $r > 1$ em razão do decrescimento exponencial de (2) quando n cresce, implicando um esforço computacional pequeno (30 iterações se $r = 2$) no cálculo de (1) uma vez que não é necessário $k \to \infty$ para $\lambda_k(r) \approx \lambda(r)$. Conseqüentemente, a verificação de (i) para dado r segue trivialmente.

r	k	$\lambda_k(r)$
2	10	7.2317472078299403
2	29	7.2318213655769936
2	30	7.2318213655769927
2	100	7.2318213655769927

Tabela 1: Valores de $\lambda_k(r)$

Com efeito, tomando $k = 30$, a condição (i) constatou-se verdadeira para $1 < r \leq 4.9202261876221005$, e falsa para $r \geq 4.9202261876221014$ (neste caso, segundo [1] também é possível encontrar as soluções). Além disso, observou-se que os resultados de ponto flutuante pertenceram aos respectivos resultados intervalares e, portanto, o objetivo do trabalho foi alcançado.

Referências

[1] H. Araújo, P. Gómez, R. Mendoza, Uniqueness for the Dirichlet-Neumann Elliptic Functional on the Annulus, *em preparação.*

[2] U. Kulisch et al, "C-XSC: A C++ Class Library for Extended Scientific Computing", Spring-Verlang, Heidelberg, 1993.