

Aproximação de soluções de PVI's por meio de controladores fuzzy

Marina R. B. Dias, Laécio C. Barros,

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP,
13081-970, Campinas, SP

E-mail: madias@ime.unicamp.br, laeciocb@ime.unicamp.br.

Resumo: *A proposta deste trabalho é utilizar a teoria dos conjuntos fuzzy, em particular os controladores fuzzy, para aplicar em sistemas dinâmicos. Para que isso seja possível, é necessário investigar as propriedades da função obtida pelo controlador, bem como assegurar que funções teóricas contínuas podem ser aproximadas por estas. Mais ainda, é apresentado, como principal resultado deste trabalho, que as soluções de sistemas dinâmicos cujo campo de direções é a função f_r , saída do controlador, converge (segundo algumas hipóteses) para soluções de sistemas dinâmicos teóricos. Neste trabalho utilizou-se importantes teoremas, como o que garante que controladores fuzzy são aproximadores universais de funções contínuas e o teorema da convergência dominada de Lebesgue.*

Introdução

Em geral, os processos matemáticos que possibilitam conclusões, a partir de dadas informações, são modelados por funcionais: $y = f(x)$. Estes processos referem-se apenas a dados e funcionais matemáticos “precisos”. No entanto, o uso dos conjuntos fuzzy, combinados com a lógica fuzzy, amplia estes sistemas de entrada e saída permitindo uma modelagem com termos lingüísticos imprecisos. Um exemplo prático de um sistema fuzzy muito utilizado é o controlador fuzzy, que consiste num sistema de entradas e saídas, associadas por meio de relações fuzzy, com o auxílio de uma base de regras. Devido à importância desta ferramenta em problemas de modelagem, há pesquisas [1, 2, 7, 8, 9, 10] que discutem o fato de um sistema fuzzy ser um aproximador universal. Por aproximador universal que-remos dizer algo que pode aproximar funções

contínuas com a exatidão desejada, em compactos. Trabalhos como os de Nguyen [9, 10] serão extremamente úteis em nossa pesquisa.

Para tentar modelar um fenômeno, muitas vezes faz-se uso dos sistemas dinâmicos clássicos, pois estes são capazes de descrever, com alguma eficiência, as características do problema em questão. Do ponto de vista prático, muitas vezes as informações disponíveis são apenas qualitativas, e as variáveis são determinadas por termos imprecisos, incertos. É nesse ponto que a teoria dos conjuntos fuzzy aparece como ferramenta para tentar solucionar este problema, pois ela é capaz de trabalhar eficientemente com termos imprecisos e com informações qualitativas.

A proposta deste trabalho é utilizar controladores fuzzy para produzir funções (f_r), que estão de acordo com determinadas propriedades do fenômeno a ser modelado. Estas famílias de funções serão construídas de modo a serem aproximadores universais da função f procurada. Nosso maior interesse é estudar as soluções desses novos sistemas dinâmicos e determinar condições que garantam a convergência destas para as soluções do problema teórico. Para isso, enunciaremos um teorema que explicita tais condições e garante o resultado desejado. Primeiramente faremos uma breve exposição de conceitos necessários para um melhor entendimento do leitor. Entre eles destacamos o controlador fuzzy e o teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Preliminares

Um subconjunto (clássico) A do universo U pode ser representado por sua função característica, que é dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

A idéia de Zadeh, ao formular o conceito de subconjuntos fuzzy, foi estender o conceito de um elemento pertencer ou não a um conjunto, ampliando o contradomínio de χ_A para $[0, 1]$. Admitiu-se, portanto, que um elemento, ao pertencer a um conjunto, o faz com um determinado grau.

Definição 1 : Um subconjunto fuzzy A de U , ou simplesmente conjunto fuzzy, é caracterizado por uma função de pertinência $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$, em que o número $\varphi_A(x)$ representa o grau de pertinência do elemento x ao subconjunto fuzzy A .

Definição 2 [1]: O operador $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-norma se satisfizer as seguintes condições:

1. $\Delta(1, x) = 1\Delta x = x$;
2. $\Delta(x, y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y, x)$;
3. $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$;
4. Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x\Delta y \leq u\Delta v$.

O operador t - norma modela o conectivo “e”.

Definição 3 [1]: O operador $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-conorma se satisfizer as seguintes condições:

1. $\nabla(0, x) = 0\nabla x = x$;
2. $\nabla(x, y) = x\nabla y = y\nabla x = \nabla(y, x)$;
3. $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$;
4. Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x\nabla y \leq u\nabla v$.

O operador t-conorma modela o conectivo “ou”.

Definição 4 [9]: \mathcal{D} é um método de defuzzificação se transforma uma função de pertinência $\varphi(x)$ em um número real e satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in (-\infty, a)$, então $\mathcal{D}(\varphi) \geq a$;
2. Se $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in (-\infty, a]$, então $\mathcal{D}(\varphi) > a$;

3. Se $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$, então $\mathcal{D}(\varphi) \leq a$;
4. Se $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in [a, +\infty)$, então $\mathcal{D}(\varphi) < a$.

O Controlador Fuzzy

Um controlador fuzzy é um sistema de entrada e saída baseado em regras fuzzy que possui, basicamente, quatro componentes: um processador de entrada (ou fuzzificador), um conjunto de regras lingüísticas, um método de inferência fuzzy e um processador de saída (ou defuzzificador), que gera um número real como saída. A fuzzificação é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. As funções de pertinência são formuladas para cada conjunto fuzzy envolvido no processo e, mesmo que a entrada seja crisp (clássica), ela será fuzzificada por meio de sua função característica. A base de regras pode ser considerada como o “núcleo” do controlador fuzzy. Nela se encontram as proposições fuzzy, que são fornecidas de acordo com um especialista. É neste ponto que as variáveis e suas classificações lingüísticas são catalogadas e, em seguida, modeladas por conjuntos fuzzy, isto é, funções de pertinência. Esta modelagem varia de acordo com a lógica fuzzy a ser adotada (t-normas e t-conormas). A Figura 1 ilustra a arquitetura de um controlador fuzzy.

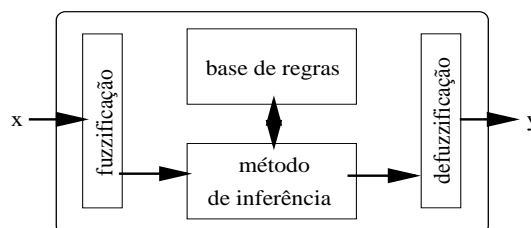


Figura 1: Esquema de um controlador fuzzy.

Uma base de regras constituída por r regras tem a forma:

- R_1 : “Proposição fuzzy 1”
ou
 R_2 : “Proposição fuzzy 2”
ou
 \vdots
ou
 R_r : “Proposição fuzzy r”.

Em geral, cada proposição fuzzy tem a forma

Se “estado” então “resposta”,

onde cada “estado” e cada “resposta” são valores assumidos por variáveis lingüísticas, e essas, por sua vez, são modeladas por conjuntos fuzzy.

Em termos matemáticos, cada uma das r proposições é descrita da forma

“Se x_1 é A_1 e x_2 é A_2 e... x_n é A_n então u_1 é B_1 e u_2 é B_2 e... u_m é B_m ”,

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ são as variáveis de entrada e saída do controlador fuzzy, respectivamente. A_i , com $1 \leq i \leq n$ e B_j , com $1 \leq j \leq m$ são conjuntos fuzzy que modelam matematicamente cada termo assumido pelas variáveis de entrada e saída, respectivamente.

É importante visualizar que um controlador fuzzy é uma aplicação do \mathbb{R}^n em \mathbb{R} construída de maneira específica, uma vez que, dado uma n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) , o controlador fornece uma saída $y \in \mathbb{R}$. Para um conjunto de regras da forma “Se $x_i \in A_i$ então $y \in B_j$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, r$ ”, onde as variáveis x_i e y são reais, A_{ij} e B_j são conjuntos fuzzy, n é o número de variáveis de entrada e r é o número de regras, é construído $y_r = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tal aplicação dependerá sempre: a) das funções de pertinência A_{ij} e B_j ; b) da t -norma e t -conorma escolhida e c) do método de defuzzificação adotado.

Muitos autores garantem, para casos particulares, que um controlador fuzzy é um aproximador universal [1, 2, 7, 8], mas Nguyen, em [9, 10], generaliza e estende estes resultados. Devido à importância de seu trabalho, relataremos aqui algumas de suas considerações.

Seja a classe de funções $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, onde \mathcal{M} consiste em funções de pertinência tais que $\varphi(x) = \varphi_0(ax + b)$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, e $\varphi_0(x)$ contínua, positiva em algum intervalo de \mathbb{R} , e zero fora dele. \mathcal{L} consiste em t -normas e t -conormas contínuas. \mathcal{D} é um método de defuzzificação que transforma cada função de pertinência em um número real de maneira que se $\varphi(x) = 0$ para $x \in (\alpha, \beta)$, então $\mathcal{D}(\varphi(x)) \in [\alpha, \beta]$.

Teorema 1 : *Para qualquer metodologia $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ e qualquer subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})|_K$ é densa em $C(K)$ com relação a norma do sup.*

Demonstração: Ver em [10].

Para este tipo de controlador, a saída f_r é contínua (portanto integrável) e pode ser escrita da forma

$$f_r(x) = \frac{\sum_{j=1}^r y_j \Delta(\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n))}{\sum_{j=1}^r (\varphi_{A_{1j}}(x_1) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{nj}}(x_n))}, \quad (1)$$

onde r é o número de regras da base de regras do controlador fuzzy, $\varphi_{A_{ij}}(x_i)$ é o valor de pertinência de x_i ao conjunto fuzzy A_{ij} e Δ é uma t -norma (ver definição 2).

Além disso, a função f_r é limitada, pois está definida em um compacto.

Observe que $f_r(K)$ é um conjunto compacto em \mathbb{R} , ou seja, $f_r(K)$ cabe em um intervalo fechado de \mathbb{R} . Mais ainda, $f_r(K) \subset f(K)$ para todo r .

O Problema

Suponha que, ao analisarmos um determinado fenômeno, nos deparamos com um Problema de Valor Inicial (PVI) dado por uma Equação Diferencial Ordinária do tipo autônoma, ou seja, a taxa de variação não depende explicitamente do tempo. O PVI tem, portanto, a forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

onde f é conhecida.

A solução do PVI (2) é garantida pela seguinte proposição:

Proposição 1 [6]: *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. A função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução do PVI se, e somente se, é contínua e satisfaz à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

$t \in [a, b]$.

Na prática, dependendo da complexidade do campo f , a solução $x(t)$ pode não ter uma expressão analítica. Entretanto, existem vários métodos numéricos que podem estimar a solução procurada com a exatidão desejada, ou seja, podemos utilizar um método numérico para obter uma solução numérica para o PVI

acima de modo que $\{x^n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Observe que uma imposição do método numérico é a de que o campo de direções f seja conhecido (ou pelo menos conhecido em alguns pontos).

O que propomos aqui é uma maneira alternativa para a obtenção da solução do PVI (2), ou uma aproximação dela, sem conhecer explicitamente o campo f . O objetivo é aproveitar as informações qualitativas disponíveis por meio de um controlador fuzzy, ou seja, vamos construir uma base de regras que representará as propriedades que caracterizam o fenômeno. Para construir a função saída f_r do controlador, utilizaremos a metodologia apresentada na seção anterior e, portanto, temos garantias de que esta f_r é uma boa aproximação para f .

Assim, temos um novo PVI para representar o fenômeno estudado, que é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_r(x(t)) \\ x_r(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

cuja solução será denotada por x_r e será estudada mais adiante.

Nas próximas seções faremos uma análise quanto à existência e unicidade da solução x_r desse novo PVI. Com a garantia de sua existência, vamos enunciar o principal resultado deste trabalho: o teorema que garante que as soluções do PVI (3) se aproximam da solução do PVI (2).

Existência e Unicidade do PVI (3)

Baseado na proposição 1, se $f_r : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, então a solução de (3) é dada por

$$x_r(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_r(s, x(s)) ds,$$

Para garantir a existência e unicidade da solução temos o seguinte resultado:

Proposição 2 [12]:

- Se $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ então, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ contendo t_0 e uma solução $x(t, x_0)$ do problema de valor inicial definido para todo $t \in I_{x_0}$ satisfazendo a condição inicial $x(t_0, x_0) = x_0$.
- Se, além disso, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $x(t, x_0)$ é único em I_{x_0} e $x(t, x_0)$ é

contínua em (t, x_0) e também é contínua a sua primeira derivada parcial com relação a t , ou seja, $x(t, x_0)$ é uma função de classe C^1 .

Como visto na seção anterior, f_r é contínua e integrável. Logo, a função f_r satisfaz 1) e 2) da proposição 2 e, portanto, temos garantia de que a solução x_r do PVI (3) existe e é única.

Resultado Principal

Nesta seção enunciaremos o teorema que garante a convergência da solução x_r , do PVI (3), para a solução x , do PVI (2) à medida que r aumenta.

Para a demonstração deste resultado, faremos uso do teorema da convergência dominada de Lebesgue, enunciado como segue:

Teorema 2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (T.C.D.)): *Seja X um espaço de medida qualquer, dotado de uma σ -álgebra \mathcal{A} e de uma medida μ . Sejam $f, f_1, f_2, \dots : X \rightarrow \mathbb{C}$ funções mensuráveis tais que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ em - q.t.p. (isto é, $(\{x \in X; f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$). Suponha que existe uma função $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ integrável tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ em - q.t.p. $x \in X$. Então $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.*

Demonstração: Ver em [3].

Segue abaixo o enunciado e a demonstração do principal resultado deste trabalho.

Teorema 3 (TEOREMA PRINCIPAL): *Seja f uma função contínua definida em um compacto $K \subset \mathbb{R}$. Seja $\{f_r\}$ uma classe de funções definidas em K tal que $f_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f$, por exemplo, as saídas de um controlador fuzzy como em (1). Considere os PVI's (2) e (3) vistos anteriormente e sejam x e x_r suas soluções, respectivamente.*

Então $x_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x$.

Demonstração: Sabemos que as soluções x e x_r são dadas, respectivamente, pelas equações:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

e

$$x_r(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_r(s, x(s)) ds.$$

Assim, utilizando o T.C.D. garantimos que a solução x_r converge para x à medida que r aumenta, pois existe uma função positiva e integrável g tal que $|f_r(x)| \leq g(x)$ em μ -q.t.p. $x \in K$.

De fato, seja $g : K \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $g(x) = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, onde $f(K) = [\alpha, \beta]$ e $f_r(K) \subset [\alpha, \beta]$, para todo r , como suposto anteriormente. Temos, portanto, $|f_r(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in K$ e todo r .

Com as hipóteses do T.C.D. satisfeitas concluímos que

$$\int_{t_0}^t f_r(s, x(s)) ds \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

e, portanto,

$$x_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x.$$

Solução Numérica

Na prática, a solução x de um sistema dinâmico teórico pode não ter uma expressão analítica, devido à complexidade do campo f . Faz-se necessário, portanto, o uso de métodos numéricos, que são capazes de estimar soluções $\{x^n\}$ tal que $\{x^n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Entretanto, $\{x^n\}$ só será obtida se o campo f for conhecido, ou seja, o conhecimento do campo de direções f é uma imposição do método numérico para produzir a estimativa $\{x^n\}$.

Quando não há conhecimento explícito do campo f , podemos fazer uso da teoria dos conjuntos fuzzy e, como visto anteriormente, utilizar os controladores fuzzy para produzir uma função f_r que poderá substituir o campo f , obtendo o PVI (3).

Com o conhecimento de f_r em forma de tabela (para cada x , temos $f_r(x)$), podemos usar os métodos numéricos que tenham garantia de estabilidade e convergência e, assim, obter $\{x_r^n\}$ tal que $\{x_r^n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_r$.

Portanto, desde que o controlador fuzzy utilizado para produzir f_r satisfaça as hipóteses do teorema principal, temos

$$\{x_r^n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x,$$

ou seja,

$$x_r^n \xrightarrow{r \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} x.$$

Abaixo mostraremos um exemplo prático da teoria aqui comentada. Mais detalhes pode ser encontrado em [5].

Exemplo: Queremos modelar a dinâmica de uma população ao longo do tempo e vamos supor que tal população seja bem representada por um modelo logístico, ou seja, possui as características qualitativas do modelo de Verhulst. Assim, a população cresce de acordo com o PVI

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(x_\infty - x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4)$$

onde a é a razão de crescimento intrínseca e x_∞ é a capacidade suporte da população (fator inibidor).

As soluções clássicas da equação (4), que representam as populações $x(t)$ em cada instante t são dadas por

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right) e^{-at} + 1}, \quad (5)$$

de onde concluímos que:

- x é crescente se $x_0 < K$
- x é constante se $x_0 = K$
- x é decrescente se $x_0 > K$,

e tem a forma representada na Figura 2.

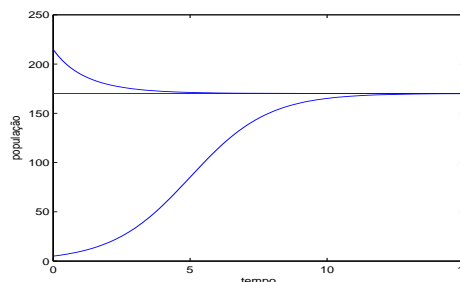


Figura 2: Possíveis soluções do modelo de Verhulst.

Considerando a taxa de crescimento específico temos, reescrevendo a equação (4) que

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(K - x) = f(x), \quad (6)$$

onde f é linear (decrescente).

Construiremos um controlador fuzzy tal que a variável de entrada seja a *população* e a variável de saída seja a *taxa de crescimento específico* (que aqui, chamaremos apenas de variação).

Uma possível base de regras será apresentada abaixo. Ela é composta por 6 regras. Para nosso modelo, estamos supondo que a variável *população* foi dividida nos seguintes termos lingüísticos: muito baixa, baixa, média, média-alta, alta e altíssima. A variável *variação* foi dividida em: baixa negativa, baixa positiva, média positiva e alta positiva. Cada um desses termos foi modelado por uma função de pertinência conforme a definição 1.

Nossa base de regras é, portanto:

R_1 : Se a população é “*muito baixa*” então a variação é “*alta positiva*”

R_2 : Se a população é “*baixa*” então a variação é “*alta positiva*”

R_3 : Se a população é “*média*” então a variação é “*média positiva*”

R_4 : Se a população é “*média alta*” então a variação é “*média positiva*”

R_5 : Se a população é “*alta*” então a variação é “*baixa positiva*”

R_6 : Se a população é “*altíssima*” então a variação é “*baixa negativa*”

As funções de pertinência dos termos lingüísticos de cada uma das variáveis (entrada e saída) estão ilustradas nas Figuras 3 e 4.

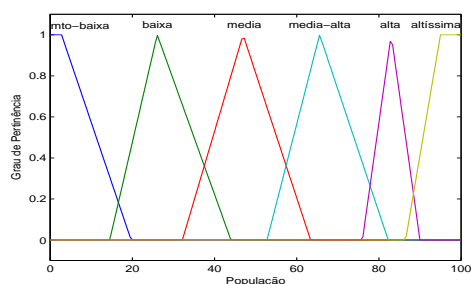


Figura 3: Funções de pertinência dos valores fuzzy assumidos pela variável linguística *população*.

A Figura 5 mostra a solução $\{x_r^n\}$ ao longo do tempo, obtida com o auxílio do controlador fuzzy (com método de inferência de Mamdani e centro de massa como defuzzificador), que está de acordo com as condições exigidas por Nguyen [10], e do método numérico Runge-Kutta de ordem 2. No mesmo gráfico temos a solução teórica do modelo de Verhulst, com

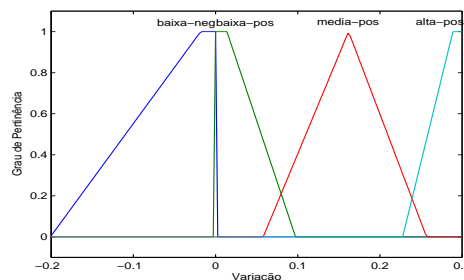


Figura 4: Funções de pertinência dos valores fuzzy assumidos pela variável *variação*.

$x(0) = 5$, $a = 0,3390$ e $x_\infty = 88,41$.

Para obter a solução ilustrada na Figura 5, utilizamos o seguinte procedimento: dado um valor inicial, x_0 , obteremos através do controlador um valor de saída $f_r(x_0)$. Esse valor refere-se a variação específica da população. Dessa maneira, para utilizá-lo no método numérico de Runge-Kutta, é necessário multiplicá-lo por x_0 . Assim, o método numérico fornecerá o valor x_1 , que servirá como a nova entrada do controlador fuzzy. Esse processo é recursivo. Ao final dele (após n iterações) obteremos os valores da população ao longo do tempo.

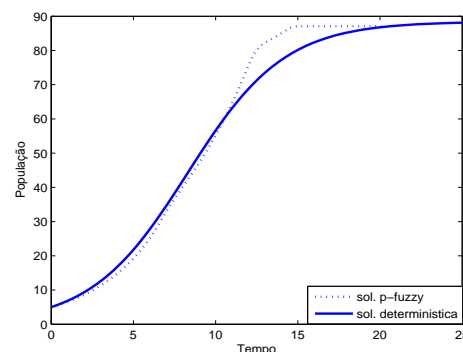


Figura 5: Trajetória do modelo de Verhulst com $x(0) = 5$, $a = 0,3390$ e $K = 88,41$.

Observe que neste exemplo a solução numérica converge para a solução clássica, como garante o teorema principal deste trabalho.

Comentários Finais

Existe um grande interesse no estudo de ferramentas que possam auxiliar na resolução de sistemas dinâmicos, pois estes são muito utilizados para representar situações do mundo

real. Devido ao fato de nem sempre ser possível identificar uma função que determine o problema, precisamos contar com ferramentas que consigam abordar este tipo de problema. Por esse motivo a teoria dos conjuntos fuzzy vem ganhando espaço a cada dia, e sua aplicação já é utilizada em diversas áreas do conhecimento.

O resultado obtido neste trabalho (teorema principal) tem importante papel na resolução de sistemas dinâmicos onde há utilização de controladores fuzzy. Ele garante que a solução do PVI (3) converge para a solução do PVI (2). Mais ainda, garante que podemos estimar uma solução numérica para o PVI (3), desde que utilizado métodos numéricos que garantam convergência, com a certeza de que ela se aproxima da solução do PVI (1), como pode ser visto no exemplo da seção anterior.

Neste trabalho, toda teoria estudada foi aplicada a sistemas fuzzy com uma entrada e uma saída ($f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), porém tais resultados podem ser estendidos para um caso mais geral, com n entradas e uma saída. Os resultados para este caso são bastante interessantes, pois tem uma maior aplicabilidade e será feito posteriormente.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] L.C.Barros, R.C. Bassanezi, “Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática”, Coleção IMECC Textos Didáticos, Campinas, 2006.
- [2] J.J.Buckeley, Y.Hayashi, Fuzzy input-output controllers are universal approximators, *Fuzzy Sets and Fuzzy Systems*, 58 (1993) 273-278.
- [3] A.A.Castro Jr., “Curso de teoria da Medida”, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [4] M.R.B.Dias, O uso de controladores fuzzy para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, em “Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CD-ROM), São Paulo, S.P., Brasil, 2005.
- [5] M.R.B.Dias, Equações Diferenciais Ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido, Dissertação de Mestrado, IMECC - Unicamp, 2006.
- [6] D.G.Figueiredo, A.F. Neves, “Equações Diferenciais Aplicadas”, 3 ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [7] B.Kosko, Fuzzy sets as universal approximators, em “Proc. of IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems”, March 8-12, 1992, San Diego, C.A., 1153-1162.
- [8] B.Kosko, J.A.Dickerson, Function Approximation with Additive Fuzzy Systems, em “Theoretical Aspects of Fuzzy Control” (H.T. Nguyen, M. Sugeno, R. Tong e R.R. Yager, eds.), pp. 313-347, John Wiley & Sons, EUA, 1995.
- [9] H.T.Nguyen, V.Kreinovich, O. Sirisaengtaksin, Fuzzy control as a universal control tool, *Fuzzy Sets and Fuzzy Systems*, 80 (1996) 71-86.
- [10] H.T.Nguyen, E.A. Walker, “A First Course in Fuzzy Logic”, Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [11] W. Pedrycz, F. Gomide, “Fuzzy Systems Engineering - Toward Human-Centric Computing”, IEEE Press, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [12] W.Rudin, “Princípios de análise matemática”, Ed. Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971.