

Interpretações do Interferômetro de Mach-Zehnder no Modelo qMG

Rafael Burlamaqui Amaral, Renata Hax Sander Reiser, Antônio Carlos da Rocha Costa

Programa de Pós-graduação em Informática, UCPel

Rua Félix da Cunha, 412, 96010-000, Pelotas, RS

E-mail: rafaelbba@ucpel.tche.br, reiser@ucpel.tche.br, rocha@ucpel.tche.br

1 Introdução

A versão quântica do modelo de Máquina Geométrica - indicado por qGM - está fundamentada na teoria dos espaços coerentes, introduzida por Girard[4]. Os objetos do domínio de estados \mathbb{S}_∞ e do domínio de processos \mathbb{D}_∞ são conjuntos coerentes que interpretam os estados e processos quânticos, ambos rotulados por pontos de um espaço geométrico isomorfo aos ordinais transfinitos, os quais caracterizam a base computacional para vetores e matrizes do espaço de Hilbert. A construção do domínio de estados e de processos é obtida em níveis ou subdomínios, modelando as possíveis dimensões de um sistema quântico. O processo de completção garante interpretação para estados e processos possivelmente infinitos. Pela aplicação de functores, obtém-se em cada nível a interpretação para o paralelismo quântico (sincronização de processos elementares quânticos), funções lineares no domínio de processos. A computação é concebida como uma transição de estados associada a uma localização espacial, obtida a partir da sincronização de processos clássicos, caracterizando a unidade de tempo computacional.

Com base na representação parcial associada aos objetos do modelo qGM, o trabalho mostra a evolução de estados e portas quânticas referentes a versão quântica do interferômetro de Mach-Zehnder, desde a construção das teias geradoras, passando pela construção dos conjuntos coerentes a correspondente transição dos estados associada.

Os conceitos básicos de espaços coerentes são descritos na Seção 2 para dar a visão geral do modelo qGM, incluindo a construção dos estados e processos. O interferômetro de Mach-Zehnder é estudado na Seção 4 para posteriormente, apresentarmos a interpretação no modelo qGM e analogias com o modelo de circuitos. As conclusões resumem os resultados parciais alcançados.

2 Espaços Coerentes

Uma teia $\mathbf{W} = (W, \approx_W)$ é um par consistindo de um conjunto W com uma relação reflexiva e simétrica \approx_W . Todo subconjunto da teia com pares de elementos consistentes pela relação de coerência \approx_W é um subconjunto coerente. A coleção de subconjuntos coerentes da teia \mathbf{W} , ordenada pela relação de inclusão define um *espaço coerente* $\mathbb{W} \equiv (\text{Coh}(\mathbf{W}), \subseteq)$.

Na teoria dos espaços coerentes, uma *função linear* é uma função contínua no sentido de Scott[15], que satisfaz às propriedades de estabilidade e linearidade, garantindo a existência da menor aproximação no conjunto imagem [17, 1]. Sejam \mathbb{A} e \mathbb{B} espaços coerentes, uma função linear $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ é definida pelo seu traço linear,

$$\text{ltr}(f) = \{(\alpha, \beta) \mid \beta \in f(\alpha)\} \subseteq A \times B.$$

Seja o grafo não dirigido $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} = (A \times B, \approx_\multimap)$,

$$(\alpha, \beta) \approx_\multimap (\alpha', \beta') \leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx_{\mathbf{A}} \alpha' \rightarrow \beta \approx_{\mathbf{B}} \beta' & \text{e} \\ \beta = \beta' \rightarrow \alpha = \alpha'. \end{cases}$$

O domínio $\mathbb{A} \multimap \mathbb{B} \equiv (\text{Coh}(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}), \subseteq)$ dos traços lineares de função de \mathbb{A} para \mathbb{B} é definido pela coleção de conjuntos coerentes em $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, ordenada pela relação de inclusão.

A soma direta entre \mathbb{A} e \mathbb{B} define o espaço coerente $\mathbb{A} \amalg \mathbb{B} = (\text{Coh}(\mathbf{A} \amalg \mathbf{B}), \subseteq)$, onde a teia $\mathbf{A} \amalg \mathbf{B} = (A \dot{\cup} B, \approx_\amalg)$ é dada pela união disjunta dos conjuntos A e B e pela relação de coerência

$$\begin{cases} (0, \alpha) \approx_\amalg (0, \alpha') \Leftrightarrow \alpha \approx_A \alpha' & \text{e} \\ (1, \beta) \approx_\amalg (1, \beta') \Leftrightarrow \beta \approx_B \beta'. \end{cases}$$

O produto direto entre \mathbb{A} e \mathbb{B} , indicado pela expressão $\mathbb{A} \prod \mathbb{B} = (\text{Coh}(\mathbf{A} \prod \mathbf{B}), \subseteq)$, é gerado pelo grafo $\mathbf{A} \prod \mathbf{B} = (A \dot{\cup} B, \approx_\prod)$ e pela coerência

$$\begin{cases} (0, \alpha) \approx_\prod (0, \alpha') \Leftrightarrow \alpha \approx_A \alpha', \\ (1, \beta) \approx_\prod (1, \beta') \Leftrightarrow \beta \approx_B \beta', \\ (0, \alpha) \approx_\prod (1, \beta). \end{cases}$$

3 Modelo qGM

Primeiro, as noções de valores de memória e posição de memória são considerados para resumir os principais aspectos da máquina de estados do modelo qGM.

3.1 Posições e Valores de Memória

Neste trabalho, considera-se uma ordem (transfinita) do tipo 2ω , cuja notação para a seqüência ordenada dos seus elementos foi introduzida em [16]: $0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega$. Com base nos ordinais transfinitos de ordem 2ω , tem-se a seqüência de subconjuntos que correspondem as bases computacionais para sistemas quânticos de dimensões finitas: $Q = \{0.0, 1.0\}$, $Q^2 = \{0.0, 0.1, 1.0, 1.1\}$, \dots , $Q^n = \{0.0, 0.1, 0.10, \dots, 1.0, 1.1, 1.10, \dots\}$. Neste caso, o conjunto Q^n representa a expansão diádica da base canônica para sistemas quânticos de dimensão finita (n q-bits). De forma análoga, obtém-se a expansão diádica dos ordinais transfinitos 2ω , onde $Q \subseteq Q^2 \subseteq \dots \subseteq Q^n \subseteq Q^{n+1} \subseteq \dots \subseteq Q^\omega$. O conjunto Q^ω caracteriza as posições (endereços) da memória quântica, global e possivelmente infinita, associada ao modelo qGM.

Considera-se o subconjunto dos números complexos C como sendo o conjunto de valores de memória. Cada valor de memória $\alpha = \rho e^{i\theta} \in C$ é representado pelo par de números reais (ρ, θ) , de tal modo que o módulo $\rho \in U = [0, 1]$ e o arco θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, satisfazem a condição de normalização:

$$\alpha = \rho e^{i\theta} \in C, \alpha \equiv (\rho, \theta) \quad |\alpha|^2 = \rho^2 \leq 1.$$

3.2 Domínio de Estados

Os estados computacionais no modelo qGM são concebidos como subconjuntos coerentes de traços lineares de funções definidas de Q^ω para \mathbb{C} .

Definição 1 Considere o domínio plano definido pelo espaço coerente de posições de memória, $Q^\omega \equiv (Coh(Q^\omega, =), \subseteq)$ e o espaço coerente de valores de memória, $\mathbb{C} \equiv (Coh(C, \sim_C), \subseteq)$ onde

$$\beta \sim_C \beta' \leftrightarrow |\beta|^2 + |\beta'|^2 \leq 1.$$

A coleção dos traços lineares em $Q^\omega \rightarrow \mathbb{C}$, ordenada pela relação de inclusão, define o espaço coerente dos estados quânticos puros.

Pela Def. 1, todo estado no modelo qGM está associado a uma função $f \in Q^\omega \rightarrow \mathbb{C}$, cuja interpretação é obtida pelo traço linear de f . Lembrando também o exposto na Seção 2, $\forall (\alpha^n) \in f$, $\sum_{n=0}^\omega \alpha^n \leq 1$. Assim, um subconjunto coerente $x \in Q^\omega \rightarrow \mathbb{C}$ provê interpretação para um vetor normalizado vector no espaço de Hilbert $l_2(\mathcal{H})$.

Generalizando a Def. 1, um estado puro não-determinístico consiste numa família de estados computacionais determinísticos (onde os unitários interpretam estados determinísticos) interpretada por um subconjunto coerente de traços lineares, um traço para cada componente determinístico do estado não-determinístico.

Definição 2 Seja $\mathbf{S} = (Coh(Q^\omega \rightarrow \mathbb{C}), \approx_S)$ uma teia dada pelo conjunto de todos os subconjuntos coerentes de $Q^\omega \rightarrow \mathbb{C}$ juntamente com a relação de coerência trivial (ou seja, universal) \approx_S . A coleção de todos os subconjuntos coerentes de \mathbf{S} , ordenada pela inclusão, define o espaço coerente que modela os estados computacionais, indicada por $\mathbb{S} \equiv (Coh(\mathbf{S}), \subseteq)$.

De acordo com a Def. 2, um objeto em \mathbb{S} representa um subconjunto enumerável de vetores do espaço de Hilbert que satisfaz a condição de normalização. O espaço coerente \mathbb{S} provê interpretação para estados (puros) quânticos.

3.3 Processos no Modelo qGM

No modelo qGM considera-se um processo computacional \mathbf{p} como definido por ações (operações) indexados por pontos de um espaço geométrico obtido a partir dos ordinais transfinitos. A indexação de processos é fundamental para a formalização da base computacional, na qual são definidas as relações que satisfazem as condições de concorrência síncrona (associada ao paralelismo quântico), e de conflito de acesso a memória (o não-determinismo associado a operação de medida). As principais características reescritas logo a seguir, foram obtidas em [11, 12].

A construção do processo computacional \mathbf{p} modelando as portas quânticas unitárias é obtida pela aplicação de construtores (produtos seqüencial e paralelo e somas determinísticas ou não-determinísticas). O modelo caracteriza cada processo computacional \mathbf{p} como uma transformação de estados de computação [15], ou seja, a idéia básica é obter a representação dos tipos de dados de entrada e de saída como conjuntos parcialmente

ordenados, denominados espaços coerentes, e as computações são representadas através de funções entre esses domínios.

Pela noção de aproximação, definida pela relação de inclusão entre subconjuntos coerentes, tem-se a construção dos objetos (totais) do espaço coerente de processos, gerando informação coerente. Na representação de processos em sistemas de n q-bits, considera-se que 2^n posições da memória possam ser simultaneamente alteradas, modelando o paralelismo quântico. Consideram-se a seguir, apenas as definições relacionadas com os primeiros níveis da estrutura ordenada, visando interpretação do interferômetro de Mach-Zehnder.

3.4 Domínio de Processos

Todo processo quântico é definido como a sincronização de processos elementares, descrevendo uma transição entre estados quânticos puros (determinísticos), executada em uma unidade de tempo computacional (*lutc*). Em [12], considera-se um processo elementar como uma função $d^{(k)}$ satisfazendo a proposição:

Proposição 1 *Seja $\mathbb{A} \equiv [\mathbb{Q}^\omega \multimap \mathbb{C}_N] \multimap \mathbb{C}_N$ o espaço coerente das ações (operações) computacionais. Se $d, \text{pr}^{(i,k)} \in \mathbb{A}$, com $\text{pr}^{(i,k)}(s) = s(i,k)$, então a função $d^{(i,k)} \in [\mathbb{Q}^\omega \multimap \mathbb{C}_N] \rightarrow [\mathbb{Q}^\omega \multimap \mathbb{C}_N]$ definida pela expressão*

$$d^{(i,k)}(s)(j,l) = \begin{cases} \text{pr}^{(j,l)}(s) = s(j,l) & \text{se } l \neq k, \\ d(s) & \text{se } l = k, \end{cases}$$

é uma função linear.

A coleção de todas as funções lineares satisfazendo a Prop. 1, define o conjunto de processos elementares, permitindo o conflito no acesso (leitura) aos dados. Entretanto, processos elementares só podem escrever em uma posição na memória global. Isto significa que computações síncronas são definidas quando cada posição de memória é escrita por exatamente um processo elementar no modelo qGM, em *lutc*.

Definição 3 *Seja $\mathbf{D}_0 \equiv (\mathcal{D}_0, =)$ a teia discreta. Neste caso, $\mathbb{D}_0 \equiv (\text{Coh}(\mathbf{D}_0), \subseteq)$ indica o espaço coerente plano dos processos elementares. Tem-se que $\text{Coh}(\mathbf{D}_0) = \text{Coh}(\mathcal{D}_0, =) = \{\emptyset\} \cup \{\{u^{(k)}\} \mid u^{(k)} \in \mathcal{D}_0\}$.*

Definição 4 *Seja $\overline{\mathbb{D}}_0 \equiv (\overline{\mathbf{D}}_0, \subseteq)$ o espaço coerente dos processos quânticos unidimensionais, onde*

$x, y \in (\overline{\mathbf{D}}_0 = \text{Coh}(\mathbf{D}_0), \approx)$ sempre que são iguais ou verificam, simultaneamente, as condições:

$$x \approx y \leftrightarrow \begin{cases} \Upsilon_1(x^i) \cap \Upsilon_1(y^j) = \emptyset e \\ |x|_1, |y|_1 \leq 1 e \\ \#(x \cap y) \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

Neste caso, consideram-se as funções posição, magnitude e cardinal, respectivamente definidas pelas expressões:

- $\Upsilon_0 : \mathbf{D}_0 \rightarrow \wp(Q^2)$, $\Upsilon_1(x^i) = \{i\} \times \bigcup_{\alpha \in x} \Upsilon_0(\alpha)$;
- $|\cdot|_0 : \mathbf{D}_0 \rightarrow U$, $|x^i|_1 = \sum_{\alpha \in x^i} |\alpha|_0$
- $\#: \overline{\mathbf{D}}_0 \rightarrow \mathcal{N}$, $\#(x \cap y) \leq 1$.

Pela Def. 4, o domínio $\overline{\mathbb{D}}_0$ interpreta as transformações unitárias sobre sistemas quânticos de 1 q-bit, garantindo (pela Eq.(1)) a sincronização de ações ortogonais, inversíveis e que também preservam a condição de normalidade.

O operador produto direto aplicado sobre o espaço coerente de processos quânticos $\overline{\mathbb{D}}_0$, indicado pela expressão $\overline{\mathbb{D}}_0 \amalg \overline{\mathbb{D}}_0$, prove interpretação para o produto seqüencial de processos quânticos. A composição de processos seqüenciais é modelada pela iteração do operador produto direto. Assim, novos níveis da estrutura ordenada são definidos, como a soma direta $\mathbb{D}_1 = \overline{\mathbb{D}}_0 \amalg (\overline{\mathbb{D}}_0 \amalg \overline{\mathbb{D}}_0)$. O domínio \mathbb{D}_∞ é obtido pelas sucessivas aplicações dos funtores (produto direto e soma direta) sobre primeiro nível $\mathbb{D}_0 - \mathbb{D}_1$.

As demais etapas da construção indutiva do espaço coerente dos processos \mathbb{D}_∞ está descrita em [11] [12], incluindo o processo de completção.

4 Fenômeno da Interferência

O fenômeno de interferência é de fundamental importância na discussão dos conceitos básicos da Física Quântica, e por conseqüência, tem-se a importância do estudo do interferômetro como instrumento para desenvolvimento de algoritmos quânticos, induzindo a ocorrência de interferência construtivas nas saídas relevantes.

Este trabalho considera o interferômetro de Mach-Zehnder, por tratar-se de instrumento análogo ao experimento de dupla fenda [2, 14, 5, 8], que apresenta uma releitura mais simples e moderna em termos tecnológicos do fenômeno de interferência, facilitando sua observação e compreensão. Inclusive, é possível simular esse experimento através do Interferômetro Virtual de Mach-Zehnder [13, 9]. As duas principais idéias de um interferômetro são a introdução

de uma mudança de fase entre diferentes caminhos ópticos e a superposição das ondas assim defasadas, ambas consideradas para interpretar no modelo qGM os estados gerados na execução do experimento.

A versão quântica do interferômetro de Mach-Zehnder está baseada na diminuição da intensidade do feixe, implicando na emissão intermitente de fótons. Neste caso, tornam-se necessários detectores suficientemente sensíveis, localizados ao final do experimento, capazes de detectar a presença de fótons únicos denominados feixes monofotônicos.

Após garantir o estado monofotônico, esta porta óptica pode ser construída como na Figura 1. Neste caso, tem-se uma entrada para os possíveis caminhos, representados por $|0\rangle$ e $|1\rangle$ na notação de Dirac. Verifica-se que o experimento possui dois espelhos semi-refletores (ES1, ES2) e dois refletores (E1,E2). Um espelho semi-refletor é um dispositivo que reflete metade da luz incidente, transmitindo a outra metade sem ser afetada, introduzindo desta forma, diferentes atrasos na propagação ao longo dos caminhos. Quando não ocorre reflexão de parte da luz, os espelhos não causam perdas.

Tem-se também a presença de defasadores (ou moduladores de fase) θ_0 e θ_1 que podem representar, por exemplo, uma mudança no tamanho do percurso nos caminhos ópticos do interferômetro, caracterizando uma mudança de fase dos feixes de onda. Na seqüência, os feixes de ondas passam novamente por um espelho semi-prateado, para finalmente alcançarem os dispositivos $\mathcal{D}|0\rangle$ e $\mathcal{D}|1\rangle$, denotando os detectores da intensidade da onda nas respectivas saídas do interferômetro.

Como cada componente do fóton incidente se desloca por um caminho distinto, poderíamos esperar que cada detector $\mathcal{D}|0\rangle$ e $\mathcal{D}|1\rangle$ medisse 50% do feixe monofotônico. Mas o experimento mostra que 100% do feixe original incide no detector $\mathcal{D}|1\rangle$ (superposição construtiva de onda em $\mathcal{D}|1\rangle$) e, portanto, em $\mathcal{D}|0\rangle$ não ocorre registro (resultado gerado pela superposição destrutiva de onda em $\mathcal{D}|0\rangle$) [7]. Portanto, o uso do interferômetro viabiliza a verificação do comportamento ondulatório associado a uma partícula atômica (fóton) [3].

4.1 Interferômetro em Circuitos

Aplica-se a linguagem de circuitos para descrever o processo de interferência. Na Figura 4, introduzida

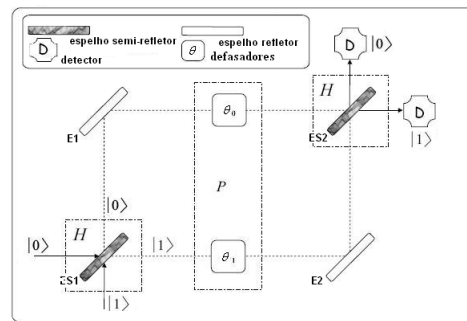


Figura 1: Interferômetro de Mach-Zehnder.

em [5, 2], faz-se uso de portas quânticas sobre estados de 1 q-bit, sendo que o estado inicial é indicado por $|\phi_0\rangle$. Cada espelho semi-prateado está representado por uma porta *Hadamard* (H), e os defasadores θ_0 e θ_1 são representados pela porta unitária *Phase* (P). A evolução do sistema pode também ser observada pela transformação seqüencial dos estados a partir de $|\varphi_0\rangle$, resultando em novos estados indicados por $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ e $|\varphi_3\rangle$.

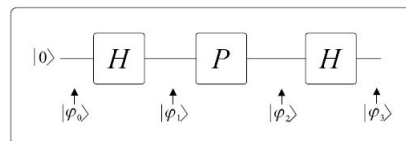


Figura 2: Circuito quântico do interferômetro.

Aplicando-se uma abordagem baseada na Álgebra Linear e restringindo-se ao estudo do espaço de Hilbert bi-dimensional $l_2(\mathcal{H}2)$, considera-se na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, um vetor (α, β) , com α, β números complexos satisfazendo a condição de normalidade $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, representa o q-bit $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathcal{H}2$. As portas quânticas básicas são transformações lineares U (no caso H e P) definidas por matrizes unitárias de ordem 2, tais que $U^\dagger U = U U^\dagger = I$, onde U^\dagger indica a transposta conjugada da matriz U . A evolução temporal no circuito, associado à Figura 4, tem as seguintes etapas de desenvolvimento:

1. $|\varphi_1\rangle = H|\varphi_0\rangle$, ou na notação matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

2. $|\varphi_2\rangle = P|\varphi_1\rangle$, ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} \\ e^{i\theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

3. $|\varphi_3\rangle = H|\varphi_2\rangle$, ou ainda

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} + e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_0} - e^{i\theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta_0}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

A fatoração da Eq. (4), resulta em:

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{2} e^{\frac{i}{2}(\theta_0+\theta_1)} \begin{pmatrix} (e^{\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)} - e^{-\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)}) \\ (e^{\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)} + e^{-\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Substituindo-se as exponenciais pelas funções trigonométricas, reduz-se a Eq. (5) à forma

$$|\varphi_3\rangle = e^{\frac{i}{2}(\theta_0+\theta_1)} (i \sin(\frac{\theta_0-\theta_1}{2})|0\rangle + \cos(\frac{\theta_0-\theta_1}{2})|1\rangle) \quad (6)$$

Por fim, omitindo-se a expressão $e^{\frac{i}{2}(\theta_0+\theta_1)}$ e considerando $\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\theta_0-\theta_1}{2}$, a Eq. (6) reduz-se à expressão:

$$|\varphi_3\rangle = i \sin(\frac{\Delta\theta}{2})|0\rangle + \cos(\frac{\Delta\theta}{2})|1\rangle. \quad (7)$$

Pela observação da Eq. (7), verifica-se que:

- se $P_0 = \sin^2(\frac{\Delta\theta}{2})$, e $\Delta\theta = 0$ então $P_0 = 0$;
- se $P_1 = \cos^2(\frac{\Delta\theta}{2})$, e $\Delta\theta = 0$ então $P_1 = 1$.

Ou seja, a aplicação de um feixe monofotônico no interferômetro mostra que este irá interagir consigo mesmo, de tal forma a produzir interferência construtiva num dos detectores, e interferência destrutiva no outro detector.

4.2 Interferômetro no modelo qGM

Consideram-se os resultados a Seção 3 para obter a interpretação no modelo qGM, dos estados $|\varphi_i\rangle_{0 \leq i \leq 3}$ e portas quânticas $U(H, P)$ relativos a modelagem do interferômetro na linguagem de circuitos quânticos.

4.2.1 Interpretação de estados

Cada estado $|\varphi_i\rangle_{0 \leq i \leq 3}$ está associado, no modelo qGM, a uma função linear $\varphi_{i0 \leq i \leq 3}$, definida do espaço coerente de posições de memória \mathbb{Q}^ω para o espaço coerente de valores de memória \mathbb{C} .

Seja \mathbb{S}_I o subespaço coerente de estados quânticos unidimensionais associado ao interferômetro de Mach-Zehnder, introduzido na Seção 4. Tem-se que $\mathbb{S}_I \subseteq \mathbb{Q}^\omega \rightarrow \mathbb{C}$ e cada conjunto coerente $x \in \mathbb{S}_I$, existe $\varphi : \mathbb{Q}^\omega \rightarrow \mathbb{C}$, tal que x corresponde ao traço linear de φ , $x = \text{ltr}(\varphi) \in \mathbb{Q}^\omega \rightarrow \mathbb{C}$

Assim, um conjunto coerente $x \in \mathbb{S}_I$ é um conjunto de pares ordenados $\alpha^n \equiv (\rho, \theta)^n \in \varphi : \mathbb{Q}^\omega \rightarrow \mathbb{C}$ com no máximo duas posições (0.0 e 1.0) associadas a valores de memória não-nulos¹, ou ainda,

$$\text{ltr}(\varphi) \equiv \{\alpha^{0.0}, \beta^{0.1}\}_{\{|\alpha|^2+|\beta|^2 \leq 1\}}.$$

Nesta interpretação, considere-se os subconjuntos coerente que são maximais para a condição de normalização, objetos totais, $\text{ltr}(\varphi_i)_{0 \leq i \leq 3} = \{\alpha_i^{0.0}, \beta_i^{0.1}\}_{\{|\alpha_i|^2+|\beta_i|^2=1\}}$:

- $\text{ltr}(\varphi_0) = \{(1, 0)^{0.0}, (0, 0)^{1.0}\}$
- $\text{ltr}(\varphi_1) = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{0.0}, (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{1.0}\}$;
- $\text{ltr}(\varphi_2) = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_0}, 0)^{0.0}, (\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_1}, 0)^{1.0}\}$;
- $\text{ltr}(\varphi_3) = \{(\sin(\frac{\Delta\theta}{2}), \frac{\pi}{2})^{0.0}, (\cos(\frac{\Delta\theta}{2}), 0)^{1.0}\}$;

Em particular, na Figura 3, representa-se a função $\varphi_1 : \mathbb{Q}^\omega \rightarrow \mathbb{C}$ cujo traço linear interpreta a superposição $|\varphi_1\rangle$. Salientam-se os subconjuntos coerentes não-vazios $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{0.0}\}$ e $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{1.0}\}$, os quais interpretam estados parciais (aproximações não maximais para a condição de normalização) do estado $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{0.0}, (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{1.0}\}$. Tem-se que:

- $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{0.0}\}$ corresponde ao traço linear da função que ainda está indefinida na posição 1.0, ou seja, tem-se que primeira componente da superposição $|\varphi_1\rangle$ recebe o valor $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e todas as demais posições tem valor $(0, 0)$, exceto a posição indefinida. Logo o conjunto coerente $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{0.0}\}$ interpreta o estado parcial $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \perp|1\rangle$ (veja representação na Figura 4.)
- $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{1.0}\} \subseteq \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{0.0}, (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{1.0}\}$ corresponde ao traço linear da função que ainda está indefinida na posição 0.0. Neste caso, o conjunto coerente $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^{1.0}\}$ interpreta o estado parcial $\perp|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$.

De forma análoga, obtém-se os demais os estados parciais apresentados nos distintos caminhos do interferômetro da Figura 4:

- $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_0}, 0)^{0.0}\}$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_0}|0\rangle + \perp|1\rangle$;
- $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_1}, 0)^{1.0}\}$ para $\perp|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_1}|1\rangle$;
- $\{(\sin(\frac{\Delta\theta}{2}), \frac{\pi}{2})^{0.0}\}$ para $i(\sin(\frac{\Delta\theta}{2})|0\rangle + \perp|1\rangle$;
- $\{(\cos(\frac{\Delta\theta}{2}), 0)^{1.0}\}$ para $\perp|0\rangle + (\cos(\frac{\Delta\theta}{2})|1\rangle$

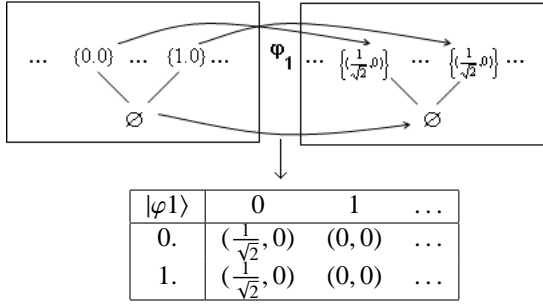


Figura 3: Representação de $|\varphi_1\rangle$ no modelo qGM.

Esta análise estende-se aos demais conjuntos coerentes que interpretam as aproximações para os estados $|\varphi_i\rangle_{0 \leq i \leq 3}$, de tal forma a dar uma interpretação para os distintos caminhos no interferômetro.

4.2.2 Interpretação de Processos

Define-se, nesta seção o procedimento de construção dos espaços coerentes relacionados com o interferômetro, bem como sua correspondência com o modelo de circuitos [6, 14, 2, 10]. O conceito mais fundamental nesta seção é o de processo elementar, o qual pode ser descrito como uma transição entre estados clássicos executada em uma unidade de tempo computacional (*1utc*).

Seja $\text{pr}^{i,j}$ a notação para função projeção na posição de memória $i, j \in Q^\omega$. Para interpretação das portas H e P no interferômetro, consideram-se as seguintes operações clássicas:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(0,0)}(s)(k) &= \begin{cases} s(1.0) := \text{pr}^{(1,0)}(s) = s(1.0), \\ s(0.0) := \{\frac{1}{\sqrt{2}}s(0.0) + \frac{1}{\sqrt{2}}s(1.0)\}, \end{cases} \\ \mathbf{h}^{(1,0)}(s)(k) &= \begin{cases} s(0.0) := \text{pr}^{(0,0)}(s) = s(0.0), \\ s(1.0) := \{\frac{1}{\sqrt{2}}s(0.0) - \frac{1}{\sqrt{2}}s(1.0)\}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(0,0)}(s)(k) &= \begin{cases} s(1.0) := \text{pr}^{(1,0)}(s) = s(1.0), \\ s(0.0) := e^{i\theta_0} s(0.0), \end{cases} \\ \mathbf{p}^{(1,0)}(s)(k) &= \begin{cases} s(0.0) := \text{pr}^{(0,0)}(s) = s(0.0), \\ s(1.0) := e^{i\theta_1} s(0.0). \end{cases} \end{aligned}$$

Aplicando-se a Def. 4, tem-se que $H^0 = \{\mathbf{h}^{(0,0)}, \mathbf{h}^{(1,0)}\} \in \mathbb{D}_1$ é o subconjunto coerente interpretando a porta *Hadamard*, quando aplicada na posição 0 (q-bit0) no modelo qGM. Os correspondentes objetos parciais são:

- $\{\mathbf{h}^{(0,0)}\} \in \mathbb{D}_1$ interpretando $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \perp & \perp \end{pmatrix}$

¹Pares com valores de memória nulos serão omitidos na representação, quando não relevantes no contexto em estudo

- $\{\mathbf{h}^{(1,0)}\} \in \mathbb{D}_1$ interpretando $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- $\{\mathbf{p}^{(0,0)}\} \in \mathbb{D}_1$ interpretando $\begin{pmatrix} e^{i\theta_0} & 0 \\ \perp & \perp \end{pmatrix}$
- $\{\mathbf{p}^{(1,0)}\} \in \mathbb{D}_1$ interpretando $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{pmatrix}$

Além disso, tem-se uma interpretação para a evolução dos estados, percorrendo apenas um dos caminhos. No caso do percurso $|0\rangle$, tem-se:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \perp|1\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_0}|0\rangle + \perp|1\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta_0}}{\sqrt{2}} \\ \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} & 0 \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \perp \end{pmatrix}$
3. $i \text{sen} \frac{\theta_0}{2}|0\rangle + \perp|1\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_0} \\ \perp \end{pmatrix}$

A evolução dos estados pelo outro caminho pode ser construída de forma análoga, incluindo as composições gerando os estados e processos totais.

5 Considerações Finais

No modelo qGM, a construção dos subconjuntos coerentes que modelam o Interferômetro de Mach-Zehnder foram consideradas, juntamente com as correspondentes construções associadas ao modelo de circuitos quânticos. Na sua definição, foram aplicados construtores da teoria dos espaços coerentes, como soma direta e produto direto, para construção da aplicação de interpretações para o interferômetro de Mach-Zehnder.

Também foram modeladas as teias, grafos dirigidos, e os diagramas, apresentando a construção ordenação dos conjuntos coerentes, sobre os quais se constroem os subespaços coerentes \mathbb{D}_0 e \mathbb{D}_1 , os quais definem os primeiros níveis do domínio \mathbb{D}_∞ . A interpretação semântica dos estados de memória foram construída por subconjuntos coerentes dados pelo traço de funções lineares definidas do espaço coerente de posições para o espaço coerente de valores de memória.

A interpretação dos estados parciais por diferentes caminhos do interferômetro, assim como a correspondente recomposição mostram que a teoria dos domínios provê uma semântica para interpretação de processos e estados na computação quântica.

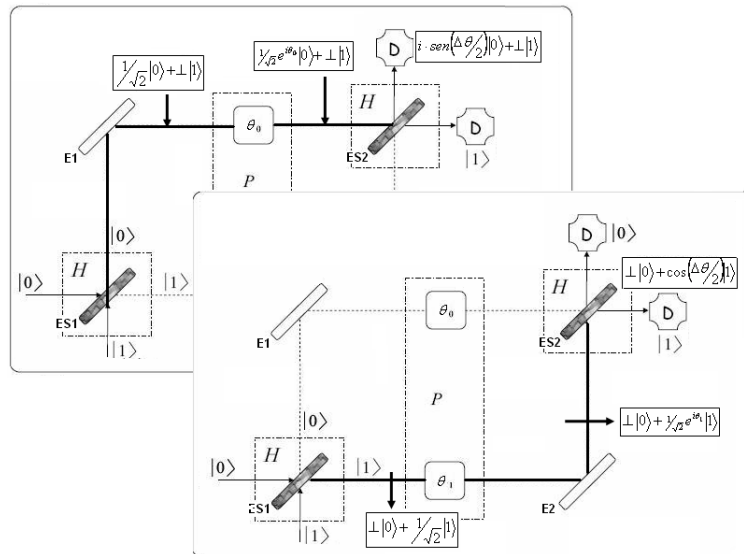


Figura 4: Circuitos ópticos parciais do interferômetro.

Referências

- [1] S. Abramsky; A. Jung. Domain Theory. "Handbook of Logic in Computer Science", Clarendon Press, New York, 1994.
- [2] G. Cabral; A. Lima; B. Lula, Interpretando o algoritmo de Deutsch no interferômetro de Mach-Zehnder, *Revista Brasileiro de Ensino de Física*, v.26, n.2, (2004), 97–117.
- [3] D. Deutsch, ; A. Ekert; R. Jozsa, "Concepts of Quantum Computation - The Physics of Quantum Information", Springer-Verlag, 2001.
- [4] J. Girard, Between logic and quantic: a tract. em "Linear in computer science", Cambridge University Press, 2004.
- [5] S. Imre; F. Balazs, "Quantum computing and communications", John Wiley & Sons Inc., 2005.
- [6] E. Knill and M. A. Nielsen, Theory of quantum computation *Encyclopaedia of Mathematics*, (2002).
- [7] A. Lima and B. L.Júnior, Computação Quântica, noções básicas utilizando a linguagem de circuitos quânticos, EDUFCG - Ed. da UFCG, 2007.
- [8] M. Nielsen and I. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, 2000.
- [9] F. Ostermann; S. Prado, Interpretações da mecânica quântica em um interferômetro virtual de Mach-Zehnder. *Rev. Bras.de Ens. de Física*, [S.l.], v.27 (2005) 193-203.
- [10] O. P. Júnior, Conceitos de Física Quântica, Editora Livraria da Física, SP, 2003.
- [11] R. Reiser, A. Costa, R. Amaral, Toward Coherence Space-based Models of Quantum Algorithms. In: II Workshop em Nanotecnologia e Computação Inspirada na Biologia, pp.1-6, PUC-RJ, 2007.
- [12] R. Reiser, A. Costa, R. Amaral, Quantum Computing: Computation from Coherence Spaces. In: WEICIQ 2007, Campina Grande: EDUFCG - Ed. da UFCG, pp.105-114, 2007.
- [13] T. Ricci; F. Ostermann; S. Prado, O tratamento clássico do interferômetro de Mach-Zehnder: uma releitura mais moderna do experimento da fenda dupla na introdução da física quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.29 (2007) 79-88.
- [14] E. Rieffel and W. Polak, An Introduction to Quantum Computing for Non-Physicists, *ACM Computing Surveys*, 1–45, 1977.
- [15] D. Scott, The lattice of flow diagrams, em "Lecture notes in mathematics, symposium on semantics of algorithmic languages", Springer Lecture Note Series, 1971.
- [16] R. Stoll, "Set Theory and Logic", Dover Publication Inc., New York, 1961.
- [17] A. Troelstra, Lectures on Linear Logic, em "Stanford-CSLI Lecture Notes", 1992.