# Princípios de processamento digital de sinais intervalares

**Roque M. P. Trindade**,
Depto de Ciências Exatas, UESB
45083-900, Vitória da Conquista, Ba
E-mail: rmpt@uesb.br,

**Benjamín R. C. Bedregal**,
Depto de Informática e Matemá¡tica Aplicada,
UFRN 59078-900 Natal, RN
bedregal@dimap.ufrn.br,

**Adrião D. D. Neto**
Depto de Computação e Automação
UFRN 59078-900 Natal, RN
E-mail: adriao@dca.ufrn.br.

## Resumo

**Este trabalho propõe uma versão intervalar dos princípios básicos de processamento digital de sinais intervalares e aborda analiticamente sistemas lineares intervalares com uma perspectiva de aplicação em processamento digital de sinais. Para isso, estende-se as propriedades básicas de sistemas lineares reais para a sua versão intervalar. Estas propriedades são causalidade, estabilidade, aditividade e homogeneidade. E finalmente uma versão intervalar da convolução é apresentada e algumas de suas propriedades algébricas são discutidas.**

## 1 Introdução

Um dos principais problemas dos usuários de processamento de sinais é a representação de sistemas reais em hardware e/ou software dedicados a processamento de sinais. Além disso, tem-se o problema de tratamento das incertezas(ruídos) do sistemas. As incertezas podem ser inerentes ao sinal, das limitações dos sensores, do modelo matemático escolhido para representar o sistema, limitações físicas de implementações, ou devido a imprecisão de algumas operações implementadas em dispositivos de DSP.

Noentanto, o uso da matemática intervalar em processamento digital de sinais aumenta a fidelidade entre o modelo matemático e o sistema real. Em função da grande complexidade da área de processamento de sinais, este trabalho limita-se apenas a sistemas lineares - SISO (do inglês “single input single output”).

Muitos métodos de processamentos de sinais são baseados no princípio de dividir para conquistar. Pois o princípio da superposição dos sistemas lineares é uma vantagem. Esse método é muito eficiente porque divide um problema complexos em vários outros mais simples. Os métodos intervalares são adequados para processamento de sinais com imprecisão porque os algoritmos intervalares incluem infinita precisão em seus resultados, além de preservar as incertezas dos sistemas e tratar os erros computacionais.

Incertezas em sinais estão presentes em várias áreas tais como: exploração espacial, aplicações comerciais, medicina, telecomunicações, na engenharia militar, circuitos eletrônicos, industriais e em investigações científicas. Nos últimos anos, intervalos vem sendo usados para modelar este tipo de incerteza em processamentos de sinais.

Moore[6] propõe controle intervalar para erros causados por operações com representação numérica finita. Os intervalos nos faculta várias interpretações semânticas,e aqui neste trabalho, aos intervalos de extremos reais possuem a mesma interpretação dada por Santiago et al.[9], onde intervalos e funções intervalares são visto como representação de números e funções reais, respectivamente.

Devido a importância dos sistemas lineares em processamentos digitais de sinais, existem na literatura vários trabalhos que usam sistema lineares e intervalos, mas nenhum deles propôs uma fundamentação teórica, uma extensão formal das suas propriedades básicas para uma versão intervalar. Geralmente estão relacionados a uma aplicações específica. Por isso, este trabalho propõe uma extensão das propriedades básicas de sistemas lineares tais como causalidade, linearidade, invariância no tempo, estabilidade, etc. com uma perspectiva de aplicação em processamento digitais de sinais.

# 2 Matemática intervalar

A fundamentação da aritmética intervalar usada neste trabalho pode ser encontrada no trabalho de Moore[6]. Essa aritmética pode ser resumida da seguinte maneira: Seja $\mathbb{IR}$ um intervalo fechado com extremidades reais. Se $X$, $Y \in \mathbb{IR}$ então para cada $\square \in \{+, -, :, \times\}$, $X \square Y = \{a \square b \in \mathbb{R} \mid a \in X \wedge b \in Y\}$ com $0 \notin Y$ no caso da divisão.[1].

A principal característica da aritmética de Moore é a inclusão monotônica, definida como segue:

Se $X$ e $Y \in \mathbb{IR}$, $x \in X$ e $y \in Y$ então $x \square y \in X \square Y$ ($0 \notin Y$ no caso da divisão).

A cada intervalo tem-se associado duas projeções, $\pi_1$ e $\pi_2$ definidas por $\pi_1([a,b]) = a$ e $\pi_2([a,b]) = b$. Para simplificação de notação usaremos $\underline{X}$ para representar $\pi_1(X)$ e $\overline{X}$ para representar $\pi_2(X)$. Seja $X : \mathbb{Z} \to \mathbb{IR}$, uma seqüência semi-intervalar, o **limite inferior** de $X[n]$ é a função semi-intervalar $\underline{X}[n] : \mathbb{IR} \to \mathbb{R}$, onde $\underline{X}[n] = \pi_1(X[n]))$ e o **limite superior** de $X[n]$ é a função semi-intervalar $\overline{X}[n] : \mathbb{IR} \to \mathbb{R}$, onde $\overline{X}[n] = \pi_2(X[n])$.

**Definição 1 (relação de ordem)** *$X = [r,s]$ e $Y = [t,u]$, então $X$ é **menor ou igual** a $Y$, denotado por $X \leq Y$, se $r \leq t$ e $s \leq u$.*

Um intervalo $X$ é dito **positivo** se $\underline{X} > 0$. E **negativo** se $\overline{X} < 0$.

A aritmética intervalar não tem a propriedade distributiva. Este é o grande problema na construção de uma versão intervalar de sistemas lineares.

A aritmética intervalar tem a **pseudo-distributividade**, formalmente: Seja $A$, $B$ e $C \in \mathbb{IR}$ então: $A(B + C) \subseteq AB + AC$.

[1] A divisão por zero não está definida na aritmética intervalar

**Proposição 1** *Um intervalo $A$ é o **ínfimo** do um conjunto de intervalos $M$ em relação à ordem $\leq$, se $A = [\inf\{\underline{X} : X \in M\}, \inf\{\overline{X} : X \in M\}]$.*

**Prova**: Direta das definições clássicas das propriedades de limites superiores e inferiores de conjuntos reais.

Note que, assim como no caso dos reais, todo conjunto limitado tem ínfimo.

## 2.1 Seqüências intervalares

Esta seção se justifica porque sinais de tempo discreto são representados matematicamente como uma seqüência de números[8]. Logo, para construir uma fundamentação matemática para processamento digital de sinais intervalares precisa-se de uma versão intervalar de seqüência de números reais.

**Definição 2 (Seqüência intervalar)** *Uma seqüência intervalar discreta é uma aplicação $X : \mathbb{Z} \to \mathbb{IR}$, representada por $\{X[n]\}$, onde o $n$-ésimo termo é denotado por $X[n]$[2].*

Para simplificação de notação, neste trabalho, a seqüência $\{X[n]\}$ será referida simplesmente como $X[n]$.

Uma seqüência intervalar discreta pode ser originada de uma amostragem periódica de um sinal analógico(contínuo). Neste caso, o valor numérico do $n$-ésimo termos da seqüência é igual ao valor do sinal analógico intervalar $X_a[t]$ no tempo $nT$; isto e, $X[n] = X_a(nT)$, onde $-\infty < n < \infty$. $T$ é o **período de amostragem**; e sua inversa é a **freqüência de amostragem**.

Neste trabalho, toda seqüência intervalar é uma seqüência **semi-intervalar**.

Um exemplo de discretização usando seqüência intervalar pode ser visto na figura 2 que representa uma aproximação da função semi-intervalar $A\sin(x)$ onde $A$ é o intervalo $[0.5, 1]$ e $-\pi \leq x \leq \pi$ cuja versão contínua é mostrada na figura 1.

### 2.1.1 Operações com seqüências intervalares discretas

No tratamento de sinais discretos de tempo discreto, seqüências podem ser manipuladas de várias maneiras. Para estender processamento

[2] [ ] será usado para denotar funções de variáveis inteiras e ( ) para denotar funções de variáveis contínuas

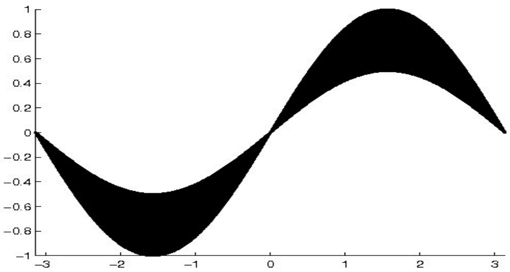


Figura 1: Representação gráfica da função semi-intervalar $[0.5, 1]\sin(x)$ para $-\pi \le x \le \pi$

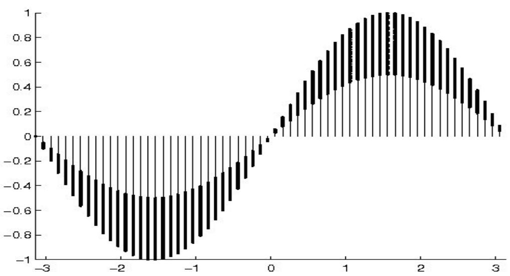


Figura 2: Um exemplo de discretização de uma função semi-intervalar usando seqüências intervalares na função $[0.5, 1]\sin(x)$ para $-\pi \le x \le \pi$.

digital de sinais para sua versão intervalar é necessário fazer o mesmos com as operações básicas sobre seqüências discretas, estendendo-as para suas versões intervalares. Em muitos casos, pode-se fazer isso simplesmente substituindo as operações reais por sua versão intervalar.

A multiplicação e a soma de duas seqüências intervalares, $X[n]$ e $Y[n]$, são definidas pelo produto ou pela soma, respectivamente, de amostra por amostra das duas seqüências. A multiplicação de uma seqüência $X[n]$ intervalar por uma constante $C$ é definida pela multiplicação de cada termo da seqüência pela constante. No caso de multiplicação por um número real $c$, se torna um caso particular da multiplicação pela constante intervalar quando $C$(troquei por maiuscula) é considerado como o intervalo degenerado $[c, c]$.

Uma seqüência intervalar $Y[n]$ é dita uma versão com **retardo ou atraso(delay)** de uma seqüência $X[n]$ se $Y[n]$ tem valores $Y[n] = X[n-n_0]$, para $n_0$ inteiro.

**Definição 3** *Seja* $X_1[i]$ *e* $X_2[k]$ *duas seqüências intervalares discretas.* $X_1[n] \preceq X_2[n]$ *se*

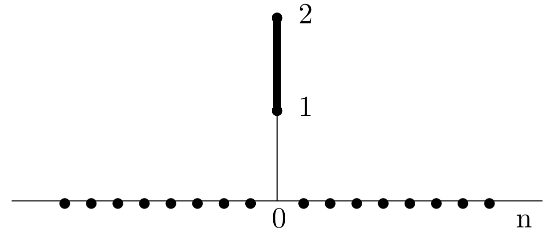


Figura 3: A representação gráfica do produto das duas seqüências intervalares $\delta_i[n]$ e $X[n] = [1, 2]$ $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

$X_1[i] \preceq X_2[k]$ $\forall i = k$.

#### 2.1.2 Seqüências básicas intervalares

Em processamento de sinal algumas seqüências básicas recebem uma atenção especial. Nesse artigo, serão apresentadas quatro seqüências. Essas sequências são destacadas na maioria dos trabalho de fundamentoção de processamento digital de sinais.

O **pulso unitário** (denotado por $\delta[n]$) é definido com a seqüência com valor 0 se $n \neq 0$ e 1 se $n = 0$. Sua versão intervalar é definida como,

**Definição 4 (Pulso unitário intervalar)** *O* ***Pulso unitário intervalar****, denotado por* $\delta_i[n]$*, é definido em função de* $\delta$ *como* $\delta_i[n] = [\delta[n], \delta[n]]$.

A figura 3 mostra um exemplo do produto de duas seqüências intervalares, em que $\delta_i[n]$ é uma seqüência constante definida por $X[n] = [1, 2]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

A seqüência pulso unitário será referida aqui como **impulso de tempo discreto** ou simplesmente **impulso**.

Assim como em processamento de sinais em tempo discreto reais, as seqüências intervalares também podem ser representadas em função do impulso, i.e,

$$X[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta_i[n-k].$$

A função **Degrau unitário** denotada por $u[n]$ é definida como 0 se $n < 0$ e 1 se $n \ge 0$.

A função degrau também precisa ser estendida para sua versão intervalar. A função degrau unitário intervalar será definida a partir da sua versão real.

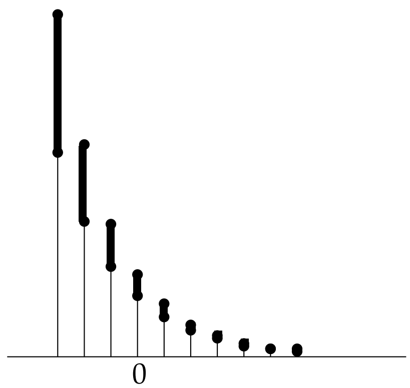

Figura 4: Ilustração gráfica de uma seqüência exponencial intervalar

**Definição 5 (Degrau unitário intervalar)** *A função* ***degrau unitário intervalar,*** *denotada por* $u_i[n]$, *é definida como* $u_i[n] = [u[n], u[n]]$.

A função degrau unitário intervalar pode ser representada pelo impulso unitário intervalar, formalmente, $u_i[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_i[n-k]$.

Duas classes de seqüências muito importantes em processamento de sinal real e em análises de sistemas lineares discretos e invariantes no tempo são as seqüências **exponenciais** e **senoidais**. Devido sua importância, as suas versões intervalares são investigadas nesse trabalho.

**Definição 6** *Uma* ***seqüência exponencial intervalar*** *tem a seguinte forma* $X[n] = A\alpha^n$, *onde* $A$ *e* $\alpha$ *são intervalos.*

Diz-se que uma seqüência exponencial intervalar é positiva e crescente quando $A > 0$ $\alpha > 1$ ou $A < 0$, $0 < \alpha < 1$. E decrescente, quando $A$ é um intervalo positivo e $\alpha \subset (0, 1)$ ou $A$ é um intervalo negativo e $\alpha \subset (1, +\infty)$. Quando $\alpha \subset (-1, 0)$, a seqüência é alternada em sinal, mas é decrescente em magnitude que decresce com o crescimento de $n$. Se $|\alpha| > 1$, a magnitude da seqüência decresce com $n$. O escopo deste trabalho não é suficiente para uma análise detalhada de convergência de seqüências intervalares. Isso será abrodado em trabalho futuro.

Na figura 4 é apresentada uma ilustração gráfica de uma seqüência exponencial, onde $A$ é um intervalo positivo e $\alpha \subset (0, 1)$.

**Definição 7** *Uma* ***seqüência intervalar senoidal*** *pode ser definida da seguinte maneira*

$$X[n] = A\,cos(\omega_0 n + \phi) \text{ para todo } n, \text{ ou} \quad (1)$$

$$X[n] = A \sin(\omega_0 n + \phi) \text{ para todo } n. \quad (2)$$

A figura 2 contem uma representação da seqüência da equação (2), onde $A = [0.5, 1]$, $\omega_0 = \frac{\pi}{32}$, $\phi = 0$ e $-31 \leq n \leq 32$.

No caso em que a seqüência exponencial intervalar tenha $A$ e $\alpha$ complexos, pode-se reescrever esses intervalos como $|A|e^{j\phi}$ e $|\alpha|e^{j\omega_0}$, respectivamente. Dessa forma, a equação 1 será reescrita como

$$\begin{aligned} X[n] &= A\alpha^n \\ &= |A|e^{j\phi}|\alpha|e^{j\omega_0 n} \\ &= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \quad (3)$$

Quando $\alpha = 1$ na equação 3, obtem-se uma **seqüência exponencial complexa**, como mostra a seguir.

$$\begin{aligned} X[n] &= |A|e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A| \cos(\omega_0 n + \phi) + |A| \sin(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \quad (4)$$

Neste trabalho não será explorado uma completa versão das exponenciais complexas, pois foge ao seu escopo. Isso será tema de trabalho.

É fácil ver que quando $|A| = [\min\{|a| : a \in A\}, \max\{|a| : a \in A\}]$, a equação (4) pode ser reescrita por uma soma das equações (1) e (2). Logo, pode-se construir um tipo de seqüência exponencial complexa intervalar. Ela é um tipo particular das seqüência complexas intervalares, onde somente a magnitude é intervalar.

Essas seqüências podem ser usadas para representar sistemas que têm incertezas apenas na magnitude e não na fase. Um aprofundamento maior na teoria de números complexos intervalares pode ser encontrado nos seguintes trabalhos [2, 1, 4, 7]. Vale resaltar que no trabalho de Boche[2] é apontado uma incompatibilidade entre a forma polar e a forma retangular de intervalos complexos, o que até hoje é um problema aberto.

Seja $X : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{IR}$ uma seqüência semi-intervalar intervalar, $a$ e $b$ o primeiro e o último, respectivamente . O **somatório intervalar** de todos $X[n]$ com $a \leq n \leq b$ é definido por

$$\sum_{i=a}^{b} X[i] = \left[ \sum_{i=a}^{b} \underline{X}[i], \sum_{i=a}^{b} \overline{X}[i] \right]. \quad (5)$$

Uma extensão genérica da equação (5) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i] = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \underline{X}[i], \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \overline{X}[i]\right]. \qquad (6)$$

**Teorema 1** *Seja $C$ uma constante intervalar. Então,*
$C\sum_{i=a}^{b} X[i] \subseteq \sum_{i=a}^{b} CX[i]$.

**Prova**: Uma generalização da propriedade distributiva

Devido a pseudo-distributividade, os sistemas lineares intervalares são aplicados somente em sistemas estritamente positivos ou estritamente negativos, pois para sistemas lineares nos conjuntos $\mathbb{IR}^{+}$ ou $\mathbb{IR}^{-}$ pode-se substituir $\subseteq$ do teorema 1 por =.

**Teorema 2** *Seja $X_1[n]$ e $X_2[n]$ seqüências semi-intervalares. Então,*

$$\sum_{i=a}^{b}(X_1[i] + X_2[i]) = \sum_{i=a}^{b} X_1[i] + \sum_{i=a}^{b} X_2[i].$$

**Prova**:

$$\sum_{i=a}^{b}(X_1[i] + X_2[i]) =$$

$$= \left[\sum_{i=a}^{b} \underline{(X_1[i] + X_2[i])}, \sum_{i=a}^{b} \overline{(X_1[i] + X_2[i])}\right]$$

$$= \left[\sum_{i=a}^{b}(\underline{X_1}[i] + \underline{X_2}[i]), \sum_{i=a}^{b}(\overline{X_1}[i] + \overline{X_2}[i])\right]$$

$$= \left[\sum_{i=a}^{b} \underline{X_1}[i], \sum_{i=a}^{b} \overline{X_1}[i]\right] + \left[\sum_{i=a}^{b} \underline{X_2}[i], \sum_{i=a}^{b} \overline{X_2}[i]\right]$$

$$= \sum_{i=a}^{b} X_1[i] + \sum_{i=a}^{b} X_2[i].$$

# 3 Propriedades básicas de sistemas intervalares discretos

Nesta seção as propriedades básicas de processamento de sinais discretos são estendidas para sua versão intervalar.

**Definição 8 (Sistema sem memória)** *Um sistema intervalar discreto $L$ é dito um sistema **sem memória** se $Y[n]$ depende somente de suas entradas $X[n]$ ou $x[n]$ (no caso de sistemas semi-intervalares).*

**Definição 9 ( SI [3] invariante no tempo)** *Um sistema intervalar é dito **invariante no tempo** quando uma variação no tempo da seqüência de entrada causa a mesma variação no tempo da seqüência de saída, isto é, se $X_1(n) = X(n - n_0) \Rightarrow Y_1(n) = Y(n - n_0)$.*

**Definição 10 (SI aditivo)** *Um sistema intervalar $L$ é **aditivo** se a resposta de um somatório de entradas é um somatório de saídas correspondentes às respectivas entradas. Formalmente, $L(X_1 + X_2) = L(X_1) + L(X_2)$.*

**Definição 11 (SI homogêneo)** *Um sistema intervalar é dito **homogêneo** se a saída do sistema para uma entrada multiplicada por uma constante for a saída do sistema para a sua respectiva entrada multiplicada pela constante. Formalmente, $L(CX) = CL(X)$.*

Esta propriedade não é genérica em sistemas lineares intervalares, ela ocorre somente em casos específicos.

**Definição 12 (Sistema linear intervalar)** *Um sistema intervalar $L$ é **linear** se para toda seqüência intervalar $X[n]$, $X_1(n)$ e $X_2(n)$ e uma constante intervalar $A$, $L\{X[n]\}$, $L\{X_1(n)\}$ e $L\{X_2(n)\}$ são seqüências intervalares,*

$$L\{X_1(n) + X_2(n)\} = L\{X_1(n)\} + L\{X_2(n)\} \qquad (7)$$

*e*

$$L\{AX[n]\} = AL\{X[n]\}. \qquad (8)$$

Observa-se que as equações (7) e (8) são as propriedades da aditividade e da homogeneidade, respectivamente, e com a sua combinação obtem-se o princípio da superposição dos sistemas lineares, i.e, $L\{AX_1(n) + BX_2(n)\} = AL\{X_1(n)\} + BL\{X_2(n)\}$.

Uma análise da condição de existência de sistemas lineares intervalares não será tratada neste trabalho, os trabalhos [5, 3, 10] abordam esse tema.

**Proposição 2** *Seja $L$ um sistema intervalar. Se $L$ é homogêneo, então existe $K \in \mathbb{IR}$ tal que para cada $X \in \mathbb{IR}$, $L[X] = KX$.*

**Prova**: Seja $K = L[[1,1]]$, pela homogeneidade de $L$, $L[X] = L[X[1,1]] = XL[[1,1]] = KX$.

**Definição 13 (Resposta ao impulso)** *A **resposta ao impulso** de um sistema linear intervalar discreto L denotada por H é:*

$$H[n] = L[\delta_i[n]]. \tag{9}$$

**Teorema 3** *Se $L : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ um sistema linear discreto e semi-intervalar. Então, $\sum_{i=a}^{b} L[i] = L\left[\sum_{i=a}^{b} i\right]$.*

**Prova**: Se $L$ é uma sistema linear semi-intervalar discreto, então existe uma constante intervalar $K$, de modo que para todo $x$, tem-se $L[x] = Kx$. Portanto,

$$\sum_{i=a}^{b} L[x] = \sum_{i=a}^{b} Kx = K\sum_{i=a}^{b} x = L\left[\sum_{i=a}^{b} x\right].$$

**Teorema 4** *Seja L um sistema linear intervalar invariante no tempo, $X[n]$ um sinal intervalar discreto representado por uma sequência semi-intervalar, $H[n]$ a resposta ao impulso de L e $Y[n]$ a saída do sistema L. Então, $Y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]H[n-i]$.*

**Prova**: Para sistemas intervalares

$$Y[n] = L[X[n]]$$

,

$X[n]$ pode ser rescrito com soma infinita de resposta ao impulso, portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} Y[n] &= L\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]\delta_i[n-i]\right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} L[X[i]\delta_i[n-i]] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]L[\delta_i[n-i]] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]H[n-i]. \end{aligned}$$

A causalidade é uma noção básica para processamento de sinais em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$. Sua extensão para a versão intervalar é trivial.

**Definição 14 (Causalidade)** *Um sistema intervalar é **causal** se para todos os valores $n_0$ a seqüência de saída até o índice $n = n_0$ depende somente dos valores de entradas $n \leq n_0$.*

**Definição 15 (Estabilidade)** *Um sistema intervalar é **estável**(bounded-input bounded-output BIBO), se cada entrada limitada produzir também uma saída limitada. Uma entrada $X[n]$ é limitada se existe um valor real fixo positivo $b_X$, tal que $\forall\ n$, $|X[n]| \leq b_X < \infty$. Uma saída $Y[n]$ é limitada se para cada entrada limitada existe um valor real positivo, $b_Y$, tal que $\forall n$, $|Y[n]| \leq b_Y < \infty$.*

## 3.1 Convolução

A convolução é uma das mais importantes operações em processamento digital de sinais Ela é um sistema linear. Um sistema linear pode ser completamente representado por uma convolução da sua função de transferência(resposta ao impulso) com a função impulso. A convolução também pode ser usada para implementar filtros de médias móveis. O conceito de convolução está fortemente ligado ao conceito de média móvel.

Em estatística, a função densidade de probabilidade da soma de duas variáveis independentes $X$ e $Y$ é dada pela convolução de suas respectivas funções densidade de probabilidade. Na multiplicação de polinômios, os coeficientes do produto são a convolução dos coeficientes dos polinômios de entrada.

## 3.2 Convolução intervalar

**Definição 16 (Convolução intervalar)** *Seja L um sistema linear intervalar discreto e invariante no tempo e $H[n]$ sua resposta ao impulso. A **convolução intervalar** de um sistema é definida com uma soma infinita de suas respostas ao impulso $H[n]$ pela a seqüência de suas respectivas entradas $X[n]$. Formalmente,*

$$X[n] * H[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i]H[n-i]. \tag{10}$$

A convolução intervalar discreta têm as seguintes propriedades:

(i) **Proposição 3 (comutativa)** *A convolução intervalar discreta é comutativa. Logo $H[n] * X[n] = X[n] * H[n]$.*

**Prova**: Tomando $H$ e $X$ sistemas intervalares discretos no tempo, devido a propriedade comultativa da multiplicação intervalar tem-se:

$$\begin{aligned} X[n] * H[n] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i]H[n-i] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H[n-i]X[i]. \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H[v]X[n-v] \\ &= H[n] * X[n]. \end{aligned}$$

O fato de que a ordem dos sinais não é importante nessa propriedade possibilita a implementação de sistemas em cascata.

**(ii) Proposição 4 (Associatividade)** *A convolução semi-intervalar é associativa, isto é,*

$$[X[n] * H[n]] * G[n] = X[n] * [H[n] * G[n]].$$

**Prova**: Omitida

Graças as propriedades associativa e distributiva, sistemas de processamentos de sinal podem ser implementados em paralelo.

# 4 Conclusão

Nesse artigo foi mostrado que o modelo intervalar é bem adequado para processamento digitais de sinais, uma vez que todo sistema discreto que representa variáveis reais podem conter erros de quantização. Esses erros não são somente dos dados, mas também da aritmética de ponto flutuante, ou da variança do sistema. Neste trabalho,várias propriedades de processamento de sinais na sua versão intervalar foram apresentadas. Entretanto, só sistemas lineares invariates no tempo foram abordados. Com a convolução intervalar,aqui apresentada, e propriedades muitos sistemas que contêm incertezas podem, agora, ser melhor modelados, apesar das limitações de sistemas lineares intervalares. Essa convolução pode ser usada no projeto de filtros intervalares, ou para análises de estabilidades de sistemas. Este trabalho poderá despertar nos usuário de processamento de sinais uma nova maneira de tratar as incertezas do sistemas digitais.

# Referências


[1] Hans-Robert Arndt. On interval systems [x] = [a][x] + [b]and the powers of interval matrices in complex interval arithmetics. *Reliable computing*, (13):245–259, 2007.

[2] Ray Boche. Complex interval arithmetic with some applications. *Lockheed Missiles & Space Company- Sunnyvale, California*, pages 1–33, 1966.

[3] Mikolaj Buslowicz and Tadeusz Kaczorek. Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Sciences*, 52(2):99–102, 2004.

[4] Yves Candau, Tarek Raissi, Nacim Ramdani, and Laurent Ibos. Complex interval arithmetic using polar form. *Reliable Computing*, 12(1):1–20, 2006.

[5] Eldon Hansen. The hull of precoditioned interval linear equations. *Reliable Computing*, (6):95–103, 2000.

[6] Ramon E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Studies in Applied Mathematics - SIAM, Philadelfia, 1979.

[7] Markus Neher. Complex standard functions and their implementation in the costly library. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(1):27, 2007.

[8] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 1989.

[9] Regivan Hugo Nunes Santiago, Benjamín René Callejas Bedregal, and Benedito Melo Acióly. Formal aspects of correctness and optimality of interval computations. *Formal Aspects of Computing*, 18:231–243, 2006.

[10] Iwona Skalna. A method for outer interval solution of systems of linear equations dapending linerly on interval parameters. *Reliable Computing*, (12):107–120, 2006.