

# Método das Características na Solução de Problemas de Propagação de Ondas de Amplitude Finita

Estaner Claro Romão, Luiz Felipe Mendes de Moura  
Faculdade de Engenharia Mecânica, Depto de Térmica e Fluidos, UNICAMP  
13083-970, Campinas, SP  
E-mail: estaner23@yahoo.com.br, felipe@fem.unicamp.br

João Batista Campos Silva  
Dept. de Engenharia Mecânica, FEIS, UNESP  
15385-000, Ilha Solteira, SP  
E-mail: jbcampos@dem.feis.unesp.br

**Resumo:** Neste trabalho apresenta-se a aplicação do Método das Características na solução de problemas de propagação de ondas de amplitude finita através de duas aplicações. A primeira trata-se da propagação de uma onda de forma triangular enquanto a segunda é utilizada uma função que descreve uma função com características parabólicas.

## 1. Introdução

Uma classe de equações diferenciais que têm interesse em mecânica dos fluidos são aquelas chamadas de problemas de valores de contorno. Neste caso a solução procurada deve satisfazer não só o interior do domínio, mas também as condições que delimitam o domínio. Pelas suas características, são as condições de contorno que caracterizam o problema.

Os problemas relativos a movimento de ondas em mecânica dos fluidos são governados por equações diferenciais parciais do tipo hiperbólicas [1]. Neste trabalho será tratado o problema de propagação de ondas de amplitude finita utilizando-se do método das características como método de solução numérica.

## 2. Descrição do Problema e o Método das Características

Para derivar as equações que governam o movimento não linear de uma onda, vamos escrever a equação da continuidade e a equação de Euler para escoamentos unidimensionais não permanentes [6].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

O termo  $a^2 \partial \rho / \partial x$  foi inserido na Equação 2 em substituição do termo  $\partial p / \partial x$  [7], inserindo assim a velocidade do som  $a$ , que é uma função de  $x$  e  $t$ . Assumindo que a velocidade da partícula,  $u$ , é menor que a velocidade do som, em condições isentrópicas uma das três variáveis dependentes,  $\rho$  pode ser eliminada das Equações 1 e 2. O subscrito 0 indica uma condição não perturbadora e  $\gamma$  a relação entre os calores específicos do gás, assim:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{2/(\gamma-1)} \quad (3)$$

Substituindo a Equação 3 nas Equações 1 e 2, obtém-se:

$$\frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} \right) + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2a}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Adicionando e subtraindo-se, respectivamente, obtém-se as seguintes equações

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( u + \frac{2a}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( u - \frac{2a}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (7)$$

A Equação 6 indica que a quantidade  $P = u + 2a/(\gamma-1)$  é constante ao longo de uma curva no plano  $x-t$ . Nessa curva  $dP = (\partial P / \partial t)dt + (\partial P / \partial x)dx = 0$ , ou:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right) P = 0 \quad (8)$$

Comparando as Equações 8 e 6, nota-se que  $dx/dt = u+a$ , que nada mais é que a expressão para a inclinação daquela curva. O mesmo pode ser interpretado na Equação 7. Logo, as Equações 6 e 7 mostram que as quantidades  $P$  e  $Q = u - 2a/(\gamma-1)$  são constantes nas curvas que possuem inclinação  $dx/dt = u+a$  e  $dx/dt = u-a$ , respectivamente [2]. Essas curvas são chamadas de características, e as quantidades  $P$  e  $Q$  são chamadas de invariantes de Riemann. Como  $u$  e  $a$  variam com  $x$  e  $t$ , as características são, geralmente, linhas curvas no plano  $x-t$ .

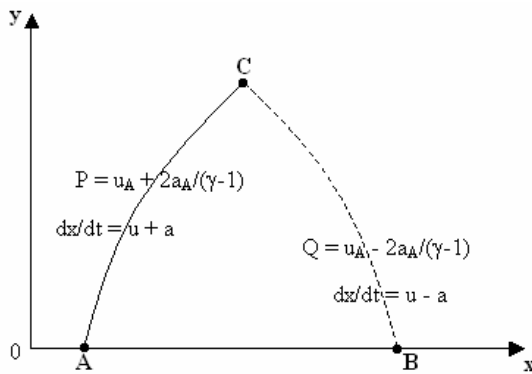


Figura 1 – Método das características

O **método das características** é desenvolvido baseando-se nas propriedades mencionadas anteriormente. Tomando-se a Figura 1, suponha-se que as condições iniciais em  $t=0$  são dadas e as condições em um ponto arbitrário  $C$  em  $t_c > 0$  devem ser calculadas [3]. Por esse ponto passam duas características, uma com inclinação  $u+a$  e outra com inclinação  $u-a$ , as quais cruzam o eixo  $x$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Como  $P_c = P_A$  e  $Q_c = Q_B$  ou mais precisamente:

$$u_C + \frac{2a_C}{\gamma-1} = u_A + \frac{2a_A}{\gamma-1}$$

$$u_C - \frac{2a_C}{\gamma-1} = u_B + \frac{2a_B}{\gamma-1}$$

$u_C$  e  $a_C$  podem ser calculados pela soma e subtração das equações acima. Assim:

$$u_C = \frac{1}{2}(u_A + u_B) + \frac{1}{\gamma-1}(a_A - a_B) \quad (9)$$

$$a_C = \frac{1}{2}(a_A + a_B) + \frac{\gamma-1}{4}(u_A - u_B) \quad (10)$$

A forma exata da característica não pode ser definida sem que seja definidos  $u$  e  $a$  na região abaixo do ponto  $C$ , mas caso a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  for pequena, esta solução poderá ser calculada aproximadamente, ou seja, as curvas características podem ser tratadas como duas linhas retas de inclinação constante  $u_A + a_A$  e  $u_B - a_B$  e os valores de  $u_C$  e  $a_C$  podem ser definidos pelas Equações 9 e 10.

Para este problema será adotada uma malha quadriculada para a solução numérica das equações não lineares 6 e 7. Suponha  $u$  e  $a$  já conhecidos em todos os pontos no tempo  $t_j$  para efetuar-se o cálculo no ponto  $C \equiv (i, j+1)$  no instante  $t_{j+1}$ . Se a característica que passa por esse ponto cruza a linha horizontal de baixo a malha nos pontos  $A$  e  $B$ , então de acordo como método das características, a condição  $C$  é determinada aproximadamente dos pontos  $A$  e  $B$  pelo uso das Equações 9 e 10 [4]. As condições e localização dos pontos  $A$  e  $B$  são obtidas por interpolação da informações conhecidas existentes na malha no mesmo tempo.

Tratando as características como linhas retas e aproximando suas inclinações por  $u_{i,j} + a_{i,j}$  e  $u_{i,j} - a_{i,j}$ , respectivamente, encontramos,

$$x_A = (i-1)h - \tau(u_{i,j} + a_{i,j}) \quad (11)$$

$$x_B = (i-1)h - \tau(u_{i,j} - a_{i,j}) \quad (12)$$

com  $h$  sendo a distância entre o ponto de índice  $(i-1,j)$  ao ponto  $(i,j)$ .

Assim que os pontos  $A$  e  $B$  estão localizados, calcula-se  $u_A$  e  $a_A$  por interpolação linear no intervalo entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$  [5]. Assim temos:

$$u_A = u_{i,j} + \frac{\tau}{h}(u_{i,j} + a_{i,j})(u_{i-1,j} - u_{i,j}) \quad (13)$$

$$a_A = a_{i,j} + \frac{\tau}{h}(u_{i,j} + a_{i,j})(a_{i-1,j} - a_{i,j}) \quad (14)$$

Analogamente, em  $B$  tem-se:

$$u_B = u_{i,j} + \frac{\tau}{h}(u_{i,j} - a_{i,j})(u_{i+1,j} - u_{i,j}) \quad (15)$$

$$a_B = a_{i,j} + \frac{\tau}{h}(u_{i,j} - a_{i,j})(a_{i+1,j} - a_{i,j}) \quad (16)$$

$u_C \equiv u_{i,j+1}$  e  $a_C \equiv a_{i,j+1}$  podem ser calculados pela substituição das Equações 13 a 16 nas Equações 9 e 10.

Os resultados, desse método, tem precisão de ordem de  $h$  e para a estabilidade do cálculo numérico é requerido que a relação  $\tau/h$  seja escolhida de maneira que o domínio de dependência numérica, em qualquer ponto da malha, esteja contido no domínio de dependência física, determinado pelas características. Em outras palavras, a condição de estabilidade é dada por:

$$\frac{\tau}{h} |u + a| \leq 1 \quad (17)$$

e

$$\frac{\tau}{h} |u - a| \leq 1 \quad (18)$$

que devem ser satisfeitas, simultaneamente, em todo o domínio de cálculo.

### 3. Aplicação Numérica – Propagação de Ondas de Amplitude Finita

Considere um tubo de 2m de comprimento com a extremidade esquerda fechada e a direita aberta. O comprimento do

tubo é dividido em intervalos de 0,02m, resultando numa malha com 101 linhas verticais para o cálculo numérico. A velocidade do som no gás do tubo em condições não perturbadas é  $a_0$ . No tempo  $t=0$  uma onda é gerada na extremidade esquerda do tubo propagando-se para a direita. Essa onda gerada tem comprimento de onda igual a 1m. Para mostrar melhor a deformação na forma da onda e o efeito da amplitude finita, assume-se que a onda tem amplitude inicial igual a  $a_0/2$  e que sua forma inicial é definida por uma série de linhas dadas por:

$$u_{i,1} = \begin{cases} \frac{a_0}{2} \frac{i-1}{12} & \text{para } 1 \leq i \leq 13 \\ \frac{a_0}{2} \frac{26-i}{13} & \text{para } 13 < i \leq 39 \\ \frac{a_0}{2} \frac{i-51}{12} & \text{para } 39 < i \leq 51 \\ 0 & \text{para } 51 < i \end{cases}$$

A condição inicial para  $a$  é determinada em relação a  $u$  por

$$a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2}u$$

Com,  $a_0 = 340m/s$ ,  $u_0 = a_0/2$ ,  $m = 101$  (para  $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $h = 0,02m$ ,  $L = 2m$  (comprimento do tubo),  $\gamma = 1,4$  (para o ar ao nível do mar) e  $\Delta t = 0,3 \frac{h}{a_0} \cong 1,76 \times 10^{-4} s$ .

Como condições de contorno, tem-se:

$$u_{1,j+1} = 0,$$

$$a_{1,j+1} = a_B - \frac{\gamma-1}{2}u_B,$$

$$u_{m,j+1} = u_A + \frac{2}{\gamma-1}(a_A - a_0),$$

$$a_{m,j+1} = a_0.$$

Logo a seguir, apresenta-se duas figuras referentes a velocidade  $u$  da partícula e da velocidade  $a$  do som, ambas ao longo do tempo.

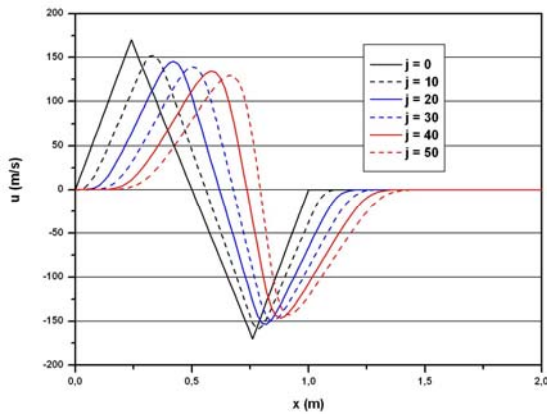


Figura 2. Distribuição temporal da velocidade  $u$  da partícula ao longo do eixo  $x$

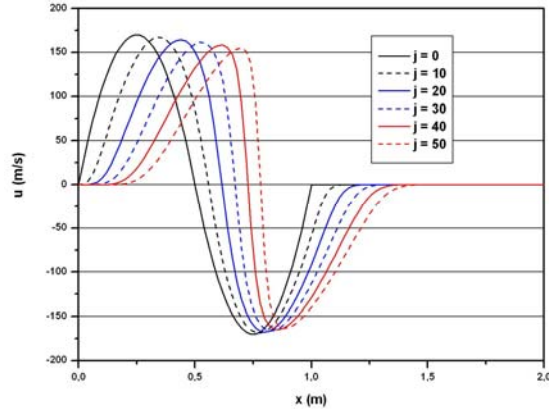


Figura 4. Distribuição temporal da velocidade  $u$  da partícula ao longo do eixo  $x$

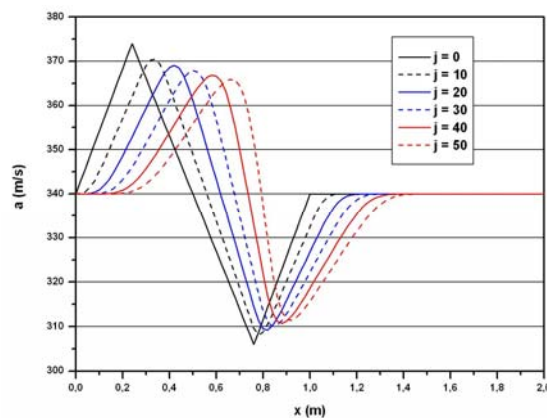


Figura 3. Distribuição temporal da velocidade  $a$  da partícula ao longo do eixo  $x$

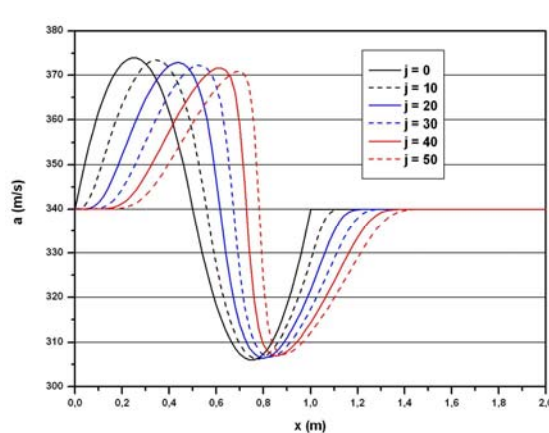


Figura 5. Distribuição temporal da velocidade  $a$  da partícula ao longo do eixo  $x$

Nas Figuras 2 e 3 as curvas foram definidas pelos seus respectivos passos no tempo, por exemplo, na Figura 2,  $j=10$  significa que a curva representa a velocidade  $u$  da partícula no décimo passo de tempo. Nota-se nas Figuras 2 e 3 que as curvas apresentam deformações ao longo do tempo quando comparadas com a curva inicial (em  $j=0$ ).

Agora testaremos uma outra onda, sendo esta descrita pela função:

$$u_{i,1} = \begin{cases} -2720x^2 + 1360x & \text{para } 0 \leq x \leq 0,5 \\ 2720x^2 - 4080x + 1360 & \text{para } 0,5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

com  $x = (i-1) \cdot h$ . A função “a” e as condições de contorno e inicial são as mesmas apresentadas na aplicação anterior. A amplitude da onda em  $t = 0$  é 170m.

Ao contrário das ondas apresentadas nas Figuras 2 e 3, que tratam de uma onda triangular, nas Figuras 4 e 5 apresentam um onda com características parabólicas, as quais as deformações não são tão expressivas quanto no caso da onda triangular.

## Conclusões

A aplicação do método das características na solução de problemas de propagação de ondas de amplitude finita apresentou bons resultados, principalmente no que diz respeito da demonstração na forma da onda. A grande dificuldade deste método é a necessidade de que os pontos  $A$  e  $B$  serem o mais próximo possível para a maior eficiência do método. Veja que adotando  $\tau = h/2a_0$  as condições de estabilidade apresentadas nas Equações 17 e 18 estarão satisfeitas nas duas aplicações propostas, pois por exemplo na

primeira aplicação visto que  $u_{\max} \cong 175m/s$  e  $a_{\max} \cong 375m/s$  com  $\tau/h = 1/680$ , tem-se:

$$\frac{\tau}{h} |u + a| \cong \frac{1}{680} |175 + 375| \cong \frac{550}{680} \leq 1$$

Se de maneira análoga, forem feitas todas as análises necessárias impostas pelas Equações 17 e 18, será notado que as mesmas são satisfeitas, reforçando assim a eficiência da implementação do método.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado como apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq – Brasil.

## Referências

- [1] L. C. Barroso et. all., Cálculo Numérico (com aplicações), 2ª edição, editora HARBRA, 1987.
- [2] J. C. Butcher, The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations – Runge-Kutta and General Linear Methods, John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [3] B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [4] I.M. Gelfand e S.V. Fomin, Calculus of Variations, Dover Pub. INC., Nova Iorque, 2000.
- [5] C. F. Gerald and P. O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Sixth Edition, Addison-Wesley, 1999.
- [6] R. W. Fox e A. T. McDonald, Introdução à Mecânica dos Fluidos, 5ª edição, LTC Editora, 2001.
- [7] L. F. M. Moura e K. A. R. Ismail, Métodos Numéricos em Mecânica dos Fluidos, Notas de Aulas, FEM-UNICAMP, 1994.