

# Uma Estimativa de Erro Para o Método de Estabilização Submalha Não Linear - NSGS

**Isaac P. Santos,**

Departamento de Informática, UFES,  
Av. Fernando Ferrari, 514, 29075-910 Vitória - ES  
E-mail: ipsantos@inf.ufes.br,

**Regina C. Almeida**

Departamento de Mecânica Computacional  
Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/MCT  
Av. Getulio Vargas, 333, 25651-075, Petrópolis, RJ  
E-mail: rcca@lncc.br

**Resumo:** *Este trabalho apresenta uma análise de erro para o método de estabilização submalha não linear (NSGS - Nonlinear Subgrid Scale Method) [4, 5, 6, 7]. O método NSGS é uma metodologia geral para aproximar problemas de transporte do tipo convectivo-difusivo-reativo, baseado no princípio de separação de escalas. Consiste em adicionar uma viscosidade artificial não linear e não parametrizada somente na micro escala, assumindo que a malha não seja refinada o suficiente para que os efeitos viscosos dissipem os efeitos inerciais. Resultados numéricos mostrando a comprovação das taxas de convergências são apresentados.*

## 1 Introdução

Considere a equação de convecção-difusão-reação cuja solução satisfaz

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \sigma u &= f & \text{em } \Omega; & (1) \\ u &= 0 & \text{em } \Gamma, & (2) \end{aligned}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $1 \leq d \leq 3$ ) é um domínio aberto limitado com uma fronteira Lipschitz  $\Gamma = \partial\Omega$ ;  $\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é o campo de velocidade com  $\nabla \cdot \beta = 0$ ;  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é o coeficiente de reação;  $0 < \epsilon \ll 1$  é o coeficiente de difusão (constante);  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é o termo de fonte e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é a condição de fronteira de Dirichlet prescrita.

Esta equação é aplicada na solução de diversos problemas como, por exemplo, na simulação dos efeitos da poluição em rios,

mares e atmosfera; modelagem da evolução das reservas de petróleo e gás natural no subsolo, etc. Um grande esforço tem sido feito para o desenvolvimento de modelos numéricos e computacionais para resolver de forma precisa e eficiente essa equação.

Em [4, 7] é proposto um método de estabilização submalha não linear (NSGS) baseado em uma decomposição multiescala do espaço de aproximação, para aproximar a equação (1)-(2). Este método adiciona uma estabilização não linear à formulação de Galerkin padrão. Essa estabilização age somente na micro escala e é controlada pelo resíduo da solução aproximada associada a macro escala. Um aspecto importante desse método é sua independência de qualquer parâmetro de estabilização.

Neste trabalho é apresentada uma estimativa de erro a priori para o método NSGS. As taxas de convergência obtidas são similares à de alguns métodos estabilizados, tais como SUPG e o método submalha linear (SGS) [1, 2, 3].

A parte restante deste trabalho é organizada da seguinte forma: na Seção 2 é descrita a formulação do método de estabilização submalha não linear (NSGS) para o problema de transporte convectivo-difusivo-reativo. Na Seção 3, é apresentada a estimativa de erro a priori para o método NSGS. Os experimentos numéricos são discutidos na Seção 4 e as conclusões gerais são apresentadas na Seção 5.

## 2 Método de Estabilização Submalha Não Linear

A formulação variacional clássica do problema (1)-(2) é dada por: achar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$B(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3)$$

onde

$$B(u, v) = \epsilon(\nabla u, \nabla v) + a(u, v); \quad (4)$$

$$a(u, v) = (\beta \cdot \nabla u, v) + (\sigma u, v) \quad (5)$$

e  $(\cdot, \cdot)$  é o produto interno usual em  $L^2(\Omega)$ . Assume-se que

$$\sigma - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \sigma_0 > 0. \quad (6)$$

Isso restringe a análise do modelo para situações que caracterizam dissipação ou destruição, excluindo-se como objeto de estudo a equação de Helmholtz.<sup>1</sup>

O Lema de Lax-Milgram garante existência e unicidade de solução para o problema (3). Para definir o modelo discreto, considere uma partição triangular  $\mathcal{T}_H = \{T_H\}$  do domínio  $\Omega$ , onde  $H$  denota o parâmetro de malha. Para cada triângulo  $T_H \in \mathcal{T}_H$ , quatro subtriângulos são criados conectando os pontos médios de suas arestas. Fazendo  $h = H/2$ , obtém-se uma nova triangulação  $\mathcal{T}_h = \{T_h\}$  mais refinada do domínio  $\Omega$ . Uma aproximação de elementos finitos lineares por partes de dois níveis é introduzida através da definição dos seguintes espaços:

$$X_H = \{u_H \in H^1(\Omega) \mid u_H|_{T_H} \in \mathbb{P}_1(T_H), \quad \forall T_H \in \mathcal{T}_H\}; \quad (7)$$

$$X_h = \{u_h \in H^1(\Omega) \mid u_h|_{T_h} \in \mathbb{P}_1(T_h), \quad \forall T_h \in \mathcal{T}_h\}. \quad (8)$$

Além disso, é introduzido um espaço discreto  $X_h^H \subset X_h$ , tal que a seguinte decomposição se verifica:

$$X_h = X_H \oplus X_h^H, \quad (9)$$

onde  $X_H$  é o espaço das escalas resolvidas (macro) e  $X_h^H$  é o espaço das escalas não resolvidas (submalha). Define-se também um operador projeção linear  $P_H : X_h \rightarrow X_H$  tal

<sup>1</sup> Para o caso  $\sigma < 0$ , a equação diferencial é indefinida e a unicidade de solução advém de outros procedimentos não adotados neste artigo.

que  $X_h^H = (I - P_H)X_h$ , onde  $I$  é o operador identidade. Então, dados  $u_h \in X_h$  e  $u_H \in X_H$  tais que  $u_h$  e  $u_H$  coincidem nos nós da escala macro, a decomposição (9) implica que  $u_h^H = (I - P_H)u_h = u_h - u_H$ ,  $\forall u_h^H \in X_h^H$ . O par  $(X_H, X_h)$  é chamado de cenário de discretização  $\mathbb{P}_1/\text{dois níveis}$  (Figura 1).

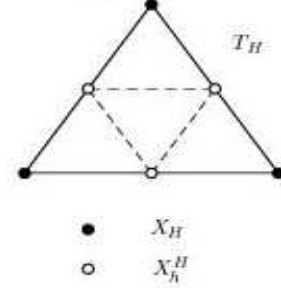


Figura 1: Representação do cenário  $\mathbb{P}_1/\text{dois níveis}$ .

O Método de Estabilização Submalha Não Linear (NSGS) [4, 7] consiste em: Achar  $u_h \in X_h$  tal que

$$B(u_h, v_h) + \sum_{T_h \in \mathcal{T}_h} D(u_H, u_h^H, v_h^H) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in X_h, \quad (10)$$

onde o operador não linear  $D(u_H, u_h^H, v_h^H)$  em cada elemento  $T_h$  é dado por

$$D(u_H; u_h^H, v_h^H) = \int_{T_h} \xi \nabla u_h^H \cdot \nabla v_h^H d\Omega, \quad (11)$$

com

$$\xi = \xi(u_H) = \frac{1}{2} \mu(h) |\beta_H^H|$$

e  $\mu(h)$  o comprimento característico da escala submalha. Para o cenário de discretização  $\mathbb{P}_1/\text{dois níveis}$ , pode-se utilizar  $\mu(h) = h/2$ . O campo de velocidade submalha  $\beta_h^H$  é dado por

$$\beta_h^H = \begin{cases} \frac{R(u_H)}{|\nabla u_H|^2} \nabla u_H, & \text{se } |\nabla u_H| \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (12)$$

onde

$$R(u_H) = -\epsilon \Delta u_H + \beta \cdot \nabla u_H + \sigma u_H - f. \quad (13)$$

Tomando  $\xi = c_b h$ , com  $c_b$  constante, obtém-se o Método Submalha Linear (SGS) [1, 2, 3]. No caso em que  $|\nabla u_H| = 0$ , obtém-se o método de Galerkin padrão.

**Observação 2.1** Para determinar a velocidade submalha (12) são agregadas hipóteses tendo como inspiração o método de captura de descontinuidades CAU [8]. A primeira corresponde a exigir que a equação de transporte na escala resolvida seja satisfeita em cada elemento  $T_H \in \mathcal{T}_H$ . Além disso, dentre todos os possíveis campos de velocidade,  $\beta_h^H$  está associado àquele que conduz à energia cinética mínima. Maiores detalhes ver [4, 7].

### 3 Estimativa de Erro a Priori

Nesta seção é apresentada uma estimativa de erro a priori para o modelo (10). A análise segue a abordagem utilizada em [2, 11]. As normas usuais dos espaços  $L^2(\Omega)$  e  $H^m(\Omega)$  são  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_m$ , respectivamente, e  $|\cdot|_\infty$  é a norma  $L^\infty(\Omega)$ . Neste trabalho utiliza-se  $c > 0$  como uma constante genérica que não depende de  $(H, h)$  e cujo valor pode mudar em diferentes situações.

As seguintes hipóteses [1, 2] são feitas:

- Propriedade de aproximação sobre  $X_H$ : Dado  $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  existem  $w_H \in X_H$  e  $k > 0$  tal que

$$\begin{aligned} & \|u - w_H\| + H\|\beta \cdot \nabla(u - w_H)\| \\ & \leq cH^{k+1}\|u\|_{k+1}; \end{aligned} \quad (14)$$

- O operador  $P_H : X_h \rightarrow X_H$  satisfaz

$$\|P_H v_h\| \leq c\|v_h\|; \quad (15)$$

- Estimativa inversa em  $X_h$ :

$$\begin{aligned} & \|\beta \cdot \nabla v_h\| + \|\nabla v_h\| \leq cH^{-1}\|v_h\|, \\ & \forall v_h \in X_h; \end{aligned} \quad (16)$$

- Condição inf-sup discreta: Existem  $c_a > 0$  e  $c_\delta \geq 0$ , tais que

$$\begin{aligned} c_a\|\beta \cdot \nabla v_H\| & \leq \sup_{\varphi_h \in X_h} \frac{(\beta \cdot \nabla v_H, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|} \\ & + c_\delta a_s(v_h, v_h)^{1/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $a_s(u, v) = (a(u, v) + a(v, u))/2$  é a parte simétrica de  $a(u, v)$ .

Essas condições são satisfeitas para algumas discretizações de elementos finitos. Ver [1] e [2] para maiores detalhes.

O operador submalha  $D(u_H, u_h^H, v_h^H)$  do método NSGS depende da quantidade  $|\beta_h^H|$ , que é assumida satisfazer à seguinte desigualdade:

$$q_0 \leq |\beta_h^H| \leq q_1, \quad q_0, q_1 > 0 \quad (18)$$

**Observação 3.1** Uma hipótese similar a (18) é utilizada em [9] para provar a convergência do método de captura de descontinuidades desenvolvido em [10]. É mencionado que o limite inferior  $q_0$  é tão pequeno quanto  $\varepsilon/h$ , embora nenhuma prova seja apresentada.

A hipótese (18) implica em

$$\sigma_1 H \leq \xi_c(u_H) \leq \sigma_2 H, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0. \quad (19)$$

Como consequência de (19), o operador  $D(u_H, u_h^H, v_h^H)$  é contínuo e coercivo em  $H^1(\Omega)$ .

**Teorema 3.1** Sejam  $k > 0$  e  $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  a solução do problema (1)-(2). Assuma-se que a hipótese (18) é satisfeita e que  $\varepsilon < H < 1$ . Se  $u_h$  é a solução aproximada obtida por (10), então

$$\begin{aligned} & [\varepsilon\|\nabla(u - u_h)\|^2 + \|u - u_h\|^2 + H\|u_h^H\|^2]^{1/2} \\ & \leq cH^{k+\frac{1}{2}}\|u\|_{k+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\|u - u_H\| \leq cH^{k+\frac{1}{2}}\|u\|_{k+1} \quad e \quad (21)$$

$$\|\nabla(u - u_H)\| \leq c \left[ 1 + \left( \frac{H}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right] H^k \|u\|_{k+1}. \quad (22)$$

**Demonstração:** Seja  $w_H \in X_H$  a interpolante de  $u$  em  $T$  e introduz-se as seguintes definições:

$$\eta_h = u - w_H; \quad e_h = w_H - u_h; \quad u - u_h = \eta_h + e_h.$$

Subtraindo (10) de (3) e observando que  $u_h^H = -e_h^H$  obtém-se

$$\begin{aligned} & B(e_h, v_h) + \sum_{T_H \in \mathcal{T}_H} D(u_H, e_h^H, v_h^H) = -B(\eta_h, v_h), \\ & \forall v_h \in X_h. \end{aligned} \quad (23)$$

Tomando  $e_h$  como função teste, a equação (23) pode ser reescrita como

$$B(e_h, e_h) + \sum_{T_H \in \mathcal{T}_H} D(u_H, e_h^H, e_h^H) = -B(\eta_h, e_h). \quad (24)$$

Usando a coercividade do operador  $D(\cdot, \cdot, \cdot)$ , resulta

$$\begin{aligned} & \varepsilon\|\nabla e_h\|^2 + a_s(e_h, e_h) + \sigma_1 H \|\nabla e_h^H\|_{0,T}^2 \\ & \leq -B(\eta_h, e_h). \end{aligned} \quad (25)$$

Como  $a_s(\eta_h, e_h) = \frac{1}{2} [a(\eta_h, e_h) + a(e_h, \eta_h)]$ , então

$$a(\eta_h, e_h) = 2a_s(e_h, \eta_h) - a(e_h, \eta_h)$$

e, desta forma,  $-B(\eta_h, e_h)$  pode ser escrito como

$$-B(\eta_h, e_h) = -\epsilon(\nabla e_h, \nabla \eta_h) - 2a_s(e_h, \eta_h) + a(e_h, \eta_h). \quad (26)$$

Para o primeiro termo de (26), usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e de Young, obtém-se

$$-\epsilon(\nabla e_h, \nabla \eta_h) \leq \mu_1 \epsilon \|\nabla e_h\|^2 + \frac{\epsilon}{4\mu_1} \|\nabla \eta_h\|^2.$$

O segundo termo resulta em

$$\begin{aligned} -2a_s(e_h, \eta_h) &\leq \mu_2 a(e_h, e_h) + \frac{1}{\mu_2} a(\eta_h, \eta_h) \\ &\leq \mu_2 a(e_h, e_h) + \frac{\mu_2'}{\mu_2} H \|\beta \cdot \nabla \eta_h\|^2 \\ &\quad + \left( \frac{H^{-1}}{4\mu_2' \mu_2} + \frac{|\sigma|_\infty}{\mu_2} \right) \|\eta_h\|^2; \end{aligned}$$

e o terceiro termo

$$\begin{aligned} a(e_h, \eta_h) &\leq (\beta \cdot \nabla e_h, \eta_h) + \mu_3 a_s(e_h, e_h) \\ &\quad + \frac{c_0^2}{4\mu_3} \|\eta_h\|^2. \end{aligned}$$

Introduzindo estas três desigualdades em (25), obtém-se

$$\begin{aligned} &\epsilon(1 - \mu_1) \|\nabla e_h\|^2 + (1 - \mu_2 - \mu_3) a_s(e_h, e_h) \\ &\quad + \sigma_1 H \|\nabla e_h^H\|^2 \leq (\beta \cdot \nabla e_h, \eta_h) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{4\mu_1} \|\nabla \eta_h\|^2 + \frac{\mu_2'}{\mu_2} H \|\beta \cdot \nabla \eta_h\|^2 \\ &\quad + \left( \frac{H^{-1}}{4\mu_2' \mu_2} + \frac{|\sigma|_\infty}{\mu_2} + \frac{c_0^2}{4\mu_3} \right) \|\eta_h\|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Agora, considera-se o termo  $(\beta \cdot \nabla e_h, \eta_h)$ , isto é,

$$(\beta \cdot \nabla e_h, \eta_h) \leq \|\beta \cdot \nabla e_h\| \|\eta_h\|. \quad (28)$$

Para limitar o termo  $\|\beta \cdot \nabla e_H\|$ , utiliza-se a condição inf-sup discreta (17). Note que

$$\begin{aligned} (\beta \cdot \nabla e_H, v_h) &= -(\beta \cdot \nabla e_h^H, v_h) - \epsilon(\nabla e_h, \nabla v_h) \\ &\quad - (\sigma e_h, v_h) - D(u_H; e_h^H, v_h^H) - \epsilon(\nabla \eta_h, \nabla v_h) \\ &\quad - a(\eta_h, v_h). \end{aligned}$$

Então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a estimativa inversa (16), obtém-se

$$\begin{aligned} \|\beta \cdot \nabla e_H\| &\leq c\epsilon H^{-1} \|\nabla \eta_h\| + \|\beta \cdot \nabla \eta_h\| \\ &\quad + |\sigma|_\infty \|\eta\| + c\epsilon H^{-1} \|\nabla e_h\|_{0,T} \\ &\quad + (\alpha + |\beta|_\infty) \|\nabla e_h^H\| + (c_0 + c_\delta) a_s(e_h, e_h)^{1/2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o termo  $\|\beta \cdot \nabla e_h\| \|\eta_h\|$  em (28) é limitado por

$$\begin{aligned} \|\beta \cdot \nabla e_h\| \|\eta_h\| &\leq c(\epsilon H^{-1} \|\nabla \eta_h\| \|\eta_h\| \\ &\quad + \|\beta \cdot \nabla \eta_h\| \|\eta_h\| + \|\eta_h\|^2 + \epsilon H^{-1} \|\nabla e_h\| \|\eta_h\| \\ &\quad + \|\nabla e_h^H\| \|\eta_h\| + a_s(e_h, e_h)^{1/2} \|\eta_h\|). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young em cada termo obtém-se

$$\begin{aligned} \|\beta \cdot \nabla e_h\| \|\eta_h\| &\leq c \left( \frac{1}{2} \epsilon^2 H^{-1} \|\nabla \eta_h\|^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} H^{-1} \|\eta_h\|^2 + \frac{1}{2} H \|\beta \cdot \nabla \eta_h\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} H^{-1} \|\eta_h\|_{0,T}^2 + \|\eta_h\|_{0,T}^2 + \mu_4 \epsilon \|\nabla e_h\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4\mu_4} \epsilon H^{-2} \|\eta_h\|^2 + \mu_5 H \|\nabla e_h^H\|^2 \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\mu_5} H^{-1} \|\eta_h\|^2 + \mu_6 a_s(e_h, e_h) + \frac{1}{4\mu_6} \|\eta_h\|^2 \right). \end{aligned}$$

Agora, retornando para (28) e (27), e escolhendo valores adequados para  $\mu_1, \mu_2, \mu_2', \mu_3, \mu_4, \mu_5$  e  $\mu_6$ , resulta

$$\begin{aligned} &[\epsilon \|\nabla e_h\|^2 + a_s(e_h, e_h) + \sigma_1 H \|\nabla e_h^H\|^2] \\ &\quad \leq c [(\epsilon^2 H^{-1} + \epsilon) \|\nabla \eta_h\|^2 \\ &\quad + H \|\beta \cdot \nabla \eta_h\|^2 + (1 + H^{-1} + \epsilon H^{-2}) \|\eta_h\|^2]. \end{aligned} \quad (29)$$

Usando a desigualdade triangular, a hipótese (6), a propriedade de aproximação (14) e considerando  $\epsilon < H$ , obtém-se a estimativa (20). Para obter a estimativa (21) observe que

$$\|u - u_H\| \leq 2\|e_h\| + \|\eta_h\| + \|e_H\|.$$

Como  $\|e_H\| \leq c\|e_h\|$ , então

$$\|u - u_H\| \leq c\|e_h\|_0 + \|\eta_h\|_0.$$

Usando a propriedade de aproximação (14) e (29) obtém-se o resultado desejado. Finalmente, observando que

$$\|\nabla(u - u_H)\| \leq \|\nabla e_h\| + \|\nabla \eta_h\| + \|\nabla u_h^H\|$$

e usando a propriedade de aproximação (14), a hipótese  $\epsilon < H$  e (29), obtém-se a estimativa (22).  $\blacksquare$

Pode-se observar que a estimativa em  $L^2(\Omega)$  é similar à de alguns métodos estabilizados, tais como SUPG e o próprio método de estabilização submalha linear SGS. O estudo de convergência do método NSGS, através de experimentos numéricos, é apresentado na próxima seção.

**Observação 3.2** Quando  $\nabla \cdot \beta = 0$  e  $\sigma = 0$ , a forma  $a_s(\cdot, \cdot)$  não é  $L^2(T_H)$ -coerciva. Entretanto, as estimativas anteriores ainda permanecem válidas.

## 4 Experimentos Numéricos

Nesta seção são apresentados dois experimentos numéricos para avaliação das taxas de convergência do Método NSGS, utilizando a norma usual do espaço  $L^2$  e a seminorma usual do espaço  $H^1$ . Os resultados são comparados com as taxas de outros métodos tais como Galerkin, SUPG e SGS- $\mathbb{P}_1/\text{dois-níveis}$ . Todos os experimentos numéricos foram realizados no domínio  $\Omega = ]0, 1[^2$  com 5, 8, 10, 16, 20 e 24 partições da escala resolvida em cada direção. O comprimento característico utilizado foi  $\mu(h) = \frac{2\sqrt{|T_h|}}{3} \approx \frac{h}{2}$ , onde  $|T_h|$  representa a área do elemento  $T_h$ .

### 4.1 Exemplo 01 - Problema de Convecção-Difusão-Reação

Considere o problema de convecção-difusão-reação com  $\beta = (1, 0)$ ,  $\sigma = 1$  e  $\epsilon = 10^{-7}$ . O termo de fonte  $f$  e as condições de contorno de Dirichlet são escolhidas de forma que a solução exata seja

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{0.2} - \frac{3(y-0.5)^2}{0.2}\right).$$

As taxas de convergência são apresentadas nas Figuras 2 e 3. Taxas ótimas de convergência  $O(h^2)$  para a norma  $\|u - u_h\|$  são obtidas por todos os métodos. Os métodos NSGS e SGS (com  $c_b = 1$ ) apresentam comportamento semelhante para a norma  $\|u - u_H\|$ . Na norma  $\|\nabla u - \nabla u_h\|$ , todos os métodos obtêm taxas  $O(h)$ . Novamente, na norma  $\|\nabla u - \nabla u_H\|$ , calculada para os métodos NSGS e SGS, ambos métodos apresentam taxa  $O(h)$ . As taxas obtidas com a solução resolvida  $u_H$  (que é de fato a solução desejada) são mais regulares do que as obtidas com a solução  $u_h$ .

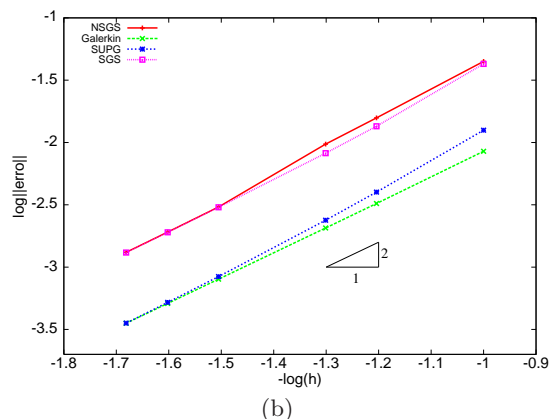
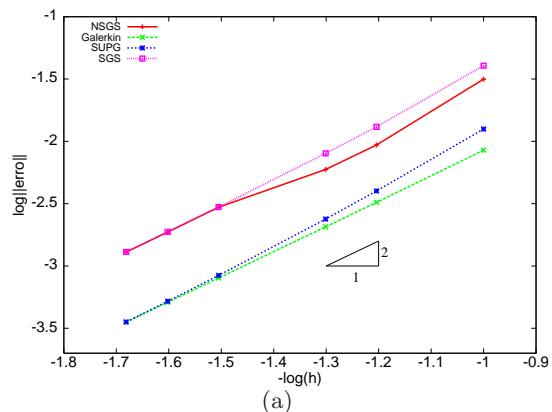


Figura 2: Exemplo 01 - Taxas de convergência na norma  $L^2$ : métodos NSGS e SGS com soluções  $u_h$  (a) e  $u_H$  (b).

### 4.2 Exemplo 02 - Problema de Convecção-Difusão

Neste estudo de convergência é considerado um problema de convecção-difusão com campo de velocidades definido por  $\beta = (1, 0)$  e coeficiente de difusão dado por  $\epsilon = 10^{-6}$ . O termo de fonte e condições de contorno de Dirichlet são escolhidos de forma que a solução exata seja expressa por

$$u(x, y) = \text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y).$$

As Figuras 4 e 5 apresentam as taxas de convergência nas normas consideradas. Existe um relevante deterioramento das taxas de convergência para o método de Galerkin, em ambas normas. Os métodos NSGS, SGS (com  $c_b = 1$ ) e SUPG apresentam taxas  $O(h^2)$  para a norma  $\|u - u_h\|$  e  $O(h)$  para a norma  $\|\nabla u - \nabla u_h\|$ . Nas normas  $\|u - u_H\|$  e  $\|\nabla u - \nabla u_H\|$ , os métodos NSGS e SGS apresentam taxas  $O(h^2)$  e  $O(h)$ , respectivamente, como esperado.

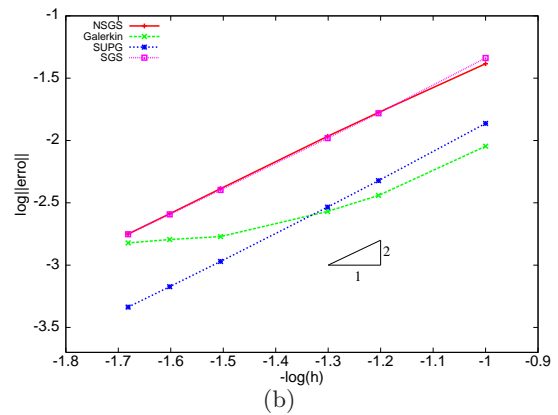
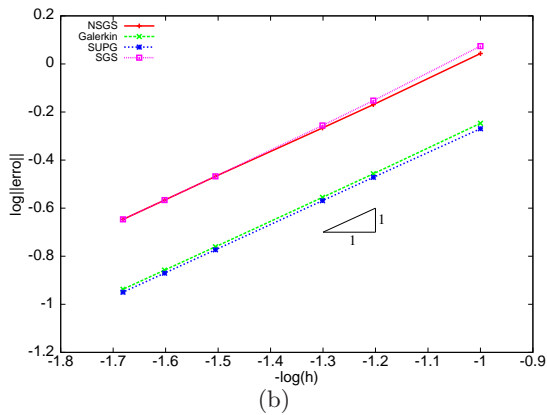
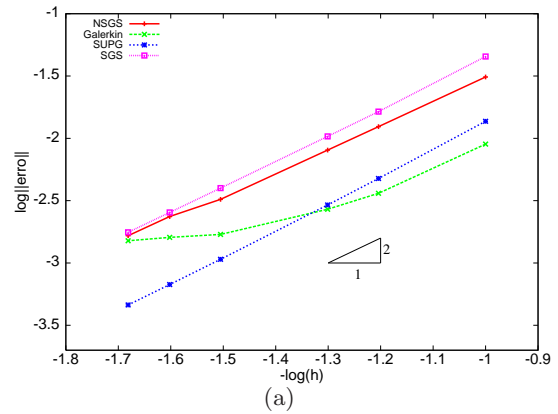
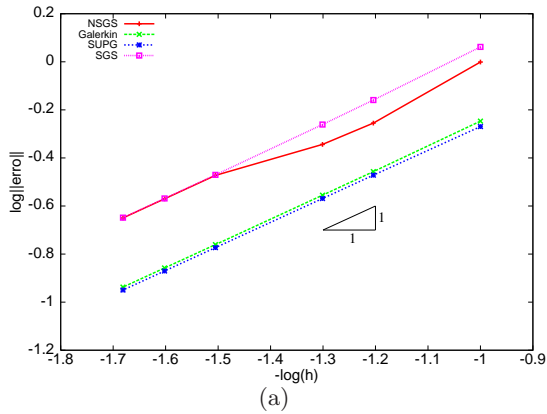


Figura 3: Exemplo 01 - Taxas de Convergência na semi-norma  $H^1$ : métodos NSGS e SGS com soluções  $u_h$  (a) e  $u_H$  (b).

Figura 4: Exemplo 02 - Taxas de convergência na norma  $L^2$ : métodos NSGS e SGS com soluções  $u_h$  (a) e  $u_H$  (b).

## 5 Conclusão

Uma estimativa de erro a priori para o método de estabilização submalha não linear NSGS foi apresentada. As taxas de convergência obtidas são equivalentes às obtidas para o método linear SGS e vários métodos estabilizados. Os experimentos numéricos mostraram que esta nova metodologia fornece resultados precisos, conduzindo às mesmas taxas previstas na análise. Assim, as taxas de convergência para o NSGS são equivalentes às dos métodos estabilizados mais utilizados na literatura, com a vantagem adicional de ser um método livre de parâmetros.

## Referências

[1] J.-L. Guermond, Stabilization of Galerkin approximations of transport equation by subgrid modeling, *Mathematical*

*Modelling and Numerical Analysis*, 33, 1293-1316 (1999)

- [2] J.-L. Guermond, Subgrid Stabilization of galerkin approximations of linear monotone operators, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21, 165-197 (2001)
- [3] W. J. Layton, A connection between subgrid scale eddy viscosity and mixed methods, *Appl. Math. and Comput.*, 133, 147-157 (2002)
- [4] I. P. Santos and R. C. Almeida, A Nonlinear Subgrid Method for Advection-Difusion Problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 (2007) 4771-4778.
- [5] I. P. Santos and R. C. Almeida, A Nonlinear Subgrid Model For Transport Problems. "Proceedings of the XXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE - Congress on Numerical



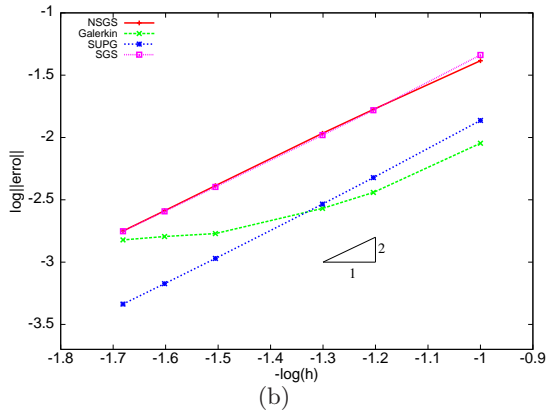
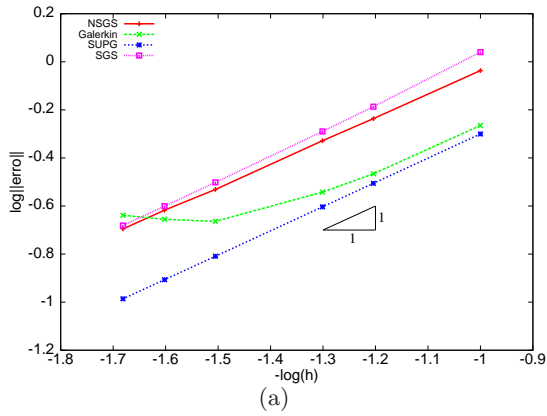


Figura 5: Exemplo 02 - Taxas de convergência na semi-norma  $H^1$ : métodos NSGS e SGS com soluções  $u_h$  (a) e  $u_H$  (b).

Methods in Engineering CMNE”, Porto, Portugal, June 13-15, 2007.

- [6] I. P. Santos e R. C. Almeida, Um modelo subgrid para a equação de transporte com imposição fraca das condições de contorno de Dirichlet. “XXX Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC - 2007”, Florianópolis, SC.
- [7] I. P. Santos, Métodos Submalhas Não Lineares Para o Problema de Convecção-Difusão-Reação, Tese de Doutorado, LNCC, 2007.
- [8] A. C. Galeão and E. G. Dutra do Carmo, A Consistent Approximate Upwind Petrov-Galerkin Method for Convection-Dominated Problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 68 (1988) 83-95.
- [9] Y. T. Shih and H. C. Elman, Iterative methods for stabilized discrete convection-

diffusion problems, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 20, 333-358 (2000).

- [10] R. Codina, A discontinuity-capturing crosswind-dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 110 (1993) 325-342.
- [11] M. E. Cawood and V. J. Ervin and W. J. Layton, Nonlinear Subgrid-Scale Model for Convection Dominated, Convection Diffusion Problems, Technical Report, (2002).