

# Enumerando (0,1)-matrizes simétricas

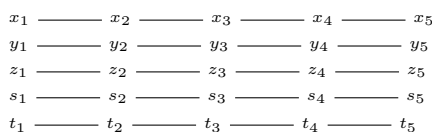
Jose Plínio O. Santos, Robson da Silva\*

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP,  
13083-970, Cx.P. 6065, Campinas, SP

E-mail: josepli@ime.unicamp.br, robson@ime.unicamp.br,

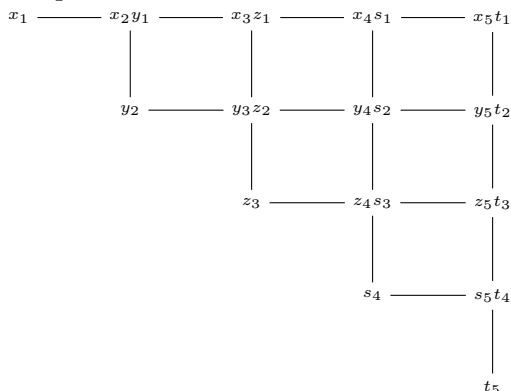
Neste trabalho apresentamos uma forma bastante simples de se enumerar (0,1)-matrizes simétricas com uma dada soma para os elementos de cada linha (e portanto de cada coluna) por meio de uma função geradora.

A idéia utilizada pode ser facilmente descrita através de um exemplo. Consideremos o caso de uma matriz  $5 \times 5$  onde em cada entrada colocamos uma variável. Representamos esta matriz pelo seguinte diagrama:



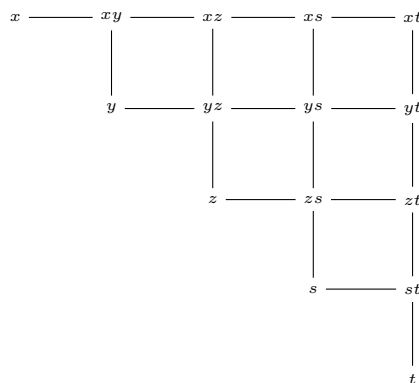
Vamos chamar as linhas 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, de linhas  $x, y, z, s$  e  $t$ . Para ilustrar nosso método vamos considerar o caso em que a soma das entradas de cada linha é igual a 2. Devemos, pois, escolher dois pontos em cada linha mantendo a simetria: a escolha de  $x_2$  implica na escolha de  $y_1$ , a de  $y_3$  na de  $z_2$ ...

Para simplificar e evitar índices, “dobramos” cada linha do diagrama anterior sobrepondo os elementos que estão sob a diagonal aos elementos que lhes são simétricos acima da diagonal



Devido à simetria da matriz, a escolha de  $x_2 y_1$  equivale à escolha do único ponto na intersecção das linhas  $x$  e  $y$ . Além disso, depois de dobradas, duas linhas se interceptam

em um único ponto: por exemplo, as linhas  $s$  e  $y$  interceptam-se no ponto  $y_4 s_2$ . Assim, podemos abandonar os índices ficando com



É claro que a escolha de dois pontos em cada linha resultará, ao desdobrar as linhas, numa (0,1)-matriz simétrica. Portanto, a função abaixo é a função geradora que enumera as (0,1)-matrizes simétricas:  $(1+x)(1+xy)(1+xz)(1+xs)(1+xt)(1+y)(1+yz)(1+ys)(1+yt)(1+z)(1+zs)(1+zt)(1+s)(1+st)(1+t)$ . O expoente de  $y$  é o número de pontos na linha  $y$ , etc. Desta forma, o coeficiente de  $x^2 y^2 z^2 s^2 t^2$  é o número de (0,1)-matrizes simétricas com soma dois nas linhas.

É importante notar que, dados inteiros não negativos  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ , o coeficiente de  $x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} s^{n_4} t^{n_5}$  na função dada acima nos fornece o número de (0,1)-matrizes simétricas tendo como soma das entradas em cada linha o expoente da variável que nomeia aquela linha.

## Referências

- [1] R. Silva, J.P.O Santos, “Funções Simétricas e Aplicações em Combinatória”, SBMAC, São Carlos, 2007.
- [2] R. P. Stanley, “Enumerative Combinatorics”, Vol.2, Cambridge Univ.Press, UK, 1999.

\*bolsista CNPq de doutorado