Enumerando (0,1)-matrizes simétricas

Jose Plínio O. Santos, **Robson da Silva**[*]
Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP,
13083-970, Cx.P. 6065, Campinas, SP
E-mail: josepli@ime.unicamp.br, robson@ime.unicamp.br,

Neste trabalho apresentamos uma forma bastante simples de se enumerar (0,1)-matrizes simétricas com uma dada soma para os elementos de cada linha (e portanto de cada coluna) por meio de uma função geradora.

A idéia utilizada pode ser facilmente descrita através de um exemplo. Consideremos o caso de uma matriz 5×5 onde em cada entrada colocamos uma variável. Representamos esta matriz pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, dash] & x_2 \arrow[r, dash] & x_3 \arrow[r, dash] & x_4 \arrow[r, dash] & x_5 \\
y_1 \arrow[r, dash] & y_2 \arrow[r, dash] & y_3 \arrow[r, dash] & y_4 \arrow[r, dash] & y_5 \\
z_1 \arrow[r, dash] & z_2 \arrow[r, dash] & z_3 \arrow[r, dash] & z_4 \arrow[r, dash] & z_5 \\
s_1 \arrow[r, dash] & s_2 \arrow[r, dash] & s_3 \arrow[r, dash] & s_4 \arrow[r, dash] & s_5 \\
t_1 \arrow[r, dash] & t_2 \arrow[r, dash] & t_3 \arrow[r, dash] & t_4 \arrow[r, dash] & t_5
\end{tikzcd}$$

Vamos chamar as linhas $1, 2, 3, 4$ e 5, respectivamente, de linhas x, y, z, s e t. Para ilustrar nosso método vamos considerar o caso em que a soma das entradas de cada linha é igual a 2. Devemos, pois, escolher dois pontos em cada linha mantendo a simetria: a escolha de x_2 implica na escolha de y_1, a de y_3 na de z_2...

Para simplificar e evitar índices, "dobramos" cada linha do diagrama anterior sobrepondo os elementos que estão sob a diagonal aos elementos que lhes são simétricos acima da diagonal

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, dash] & x_2y_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & x_3z_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & x_4s_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & x_5t_1 \arrow[d, dash] \\
& y_2 \arrow[r, dash] & y_3z_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & y_4s_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & y_5t_2 \arrow[d, dash] \\
& & z_3 \arrow[r, dash] & z_4s_3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & z_5t_3 \arrow[d, dash] \\
& & & s_4 \arrow[r, dash] & s_5t_4 \arrow[d, dash] \\
& & & & t_5
\end{tikzcd}$$

Devido à simetria da matriz, a escolha de x_2y_1 equivale à escolha do único ponto na intersecção das linhas x e y. Além disso, depois de dobradas, duas linhas se interceptam em um único ponto: por exemplo, as linhas s e y interceptam-se no ponto y_4s_2. Assim, podemos abandonar os índices ficando com

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dash] & xy \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & xz \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & xs \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & xt \arrow[d, dash] \\
& y \arrow[r, dash] & yz \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & ys \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & yt \arrow[d, dash] \\
& & z \arrow[r, dash] & zs \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & zt \arrow[d, dash] \\
& & & s \arrow[r, dash] & st \arrow[d, dash] \\
& & & & t
\end{tikzcd}$$

É claro que a escolha de dois pontos em cada linha resultará, ao desdobrar as linhas, numa (0,1)-matriz simétrica. Portanto, a função abaixo é a função geradora que enumera as (0,1)-matrizes simétricas: $(1+x)(1+xy)(1+xz)$ $(1+xs)(1+xt)(1+y)(1+yz)(1+ys)(1+yt)$ $(1+z)(1+zs)(1+zt)(1+s)(1+st)(1+t)$. O expoente de y é o número de pontos na linha y, etc. Desta forma, o coeficiente de $x^2y^2z^2s^2t^2$ é o número de (0,1)-matrizes simétricas com soma dois nas linhas.

É importante notar que, dados inteiros não negativos n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, o coeficiente de $x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}s^{n_4}t^{n_5}$ na função dada acima nos fornece o número de (0,1)-matrizes simétricas tendo como soma das entradas em cada linha o expoente da variável que nomeia aquela linha.

Referências

[1] R. Silva, J.P.O Santos, "Funções Simétricas e Aplicações em Combinatória", SBMAC, São Carlos, 2007.

[2] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics", Vol.2, Cambridge Univ.Press, UK, 1999.

[*]bolsista CNPq de doutorado