Orientador: Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP –Ilha Solteira -Departamento de Matemática
Av. Brasil Centro,56 , Ilha Solteira-SP

RESUMO

Neste trabalho estamos interessados na contagem do número de soluções da quártica de Klein definida em um corpo finito F_q, que atinge a cota dada por J. P. Serre.

O teorema de Weil (equivalente à cota de Hasse-Weil) garante que para uma curva C de gênero, definida sobre o corpo finito F_q, existem números complexos α_i, com $i = 1,2,...,2g$, tais que,

$$\#C(F_q) = 1 + q - \sum_{i=1}^{2g} \alpha_i$$

onde α_i é inteiro algébrico, satisfazendo $|\alpha_i| = \sqrt{q}.$ Mais ainda ,

$$\prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i) \in Z[t],$$

é um polinômio de grau 2g.

J. P. Serre apresenta um melhoramento da cota acima, quando a cardinalidade q do corpo finito não é um quadrado.

Teorema (Cota de Serre): *Para uma curva algébrica não-singular C de gênero g definida sobre o corpo finito* F_q, *vale a desigualdade:*

$$\#C(F_q) = 1 + q + g.\lfloor 2\sqrt{q} \rfloor,$$

onde $[\gamma]$ *denota a parte inteira de* $\gamma \in R$.

Apresentamos agora um exemplo de uma curva que atinge a cota de Serre. Esta curva é a Quártica de Klein.

Considere a curva C associada ao polinômio

$$f(x, y) = y^3 + x^3 y + x \quad \in F_8[x.y].$$

O polinômio homogêneo associado é

$$F(x, y, z) = zy^3 + x^3 y + xz^3 \in F_8[x, y, z].$$

Os pontos (0:1:0) e (1:0:0) são pontos no infinito e existe um ponto, na curva afim, que satisfaz a condição $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$, o qual chamaremos de origem.

Por ser uma curva não singular temos que g(C) = 3.

Multiplicando $f(x, y)$ por x^6 obtemos $w^3 + x^7.w + x^7$, onde $w = x^2 y$.

Retirando a origem da curva afim C_a, podemos agora ver que :

$$\# C_a(F_8) - 1 = \# \left\{ (x, w) \in F_8^* \times F_8 \,\middle|\, x^7 = \frac{w^3}{w+1} \right\}$$

$$= \# \left\{ (x, w) \in F_8^* \times F_8 \,\middle|\, w^3 + w + 1 = 0 \right\}$$

A última igualdade acima decorre de que $x^7 = 1, \ \forall x \in F_8^*$. Como o polinômio $w^3 + w + 1 = 0$ tem raízes no corpo F_8, pois é irredutível em $F_2[w]$, concluímos: $\# \left\{ (x, w) \in F_8^* \times F_8 \,\middle|\, w^3 + w + 1 = 0 \right\} = 7.3 = 21$

Somando a estas 21 soluções, a origem e os dois pontos no infinito temos:

$$\#C(F_8) = 21 + 1 + 2 = 24$$

Referências

1. A. Garcia, Pontos Racionais em Curvas sobre Corpos Finitos, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA,1995.

2. Y. Ilhara, Some Remarks on the Number of Rational Points of Algebraic Curves over Finite Fields, J. Fac. Sci. Tokyo 28, 1981, 721-724 ;

3. I. Vainsencher, Introdução às Curvas Algébricas Planas, IMPA, 2005.

A Quártica de Klein

Vania Batista Schunck Flose
Orientador: Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP –Ilha Solteira -Departamento de Matemática
Av. Brasil Centro,56 , Ilha Solteira-SP