

Um Procedimento Simples para Melhorar a Precisão Numérica da Solução do Método dos Elementos de Contorno

Carlos Friedrich Loeffler

Universidade Federal do Espírito Santo, Depto. Engenharia Mecânica
Av Fernando Ferrari, 514, Vitória, ES – CEP 29075-910 – Brasil
carlosloeffler@bol.com.br

Luiz Carlos Wrobel

Brunel University, School of Engineering and Design, Uxbridge UB8 3PH – UK
luiz.wrobel@brunel.ac.uk

Resumo: Este trabalho apresenta um procedimento simples para melhorar a precisão numérica dos resultados obtidos com o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Usualmente, valores em pontos internos são determinados através de um pós-processamento, no qual se reaplica a equação integral de governo, computando-se os valores nodais já calculados. Neste trabalho, é mostrada que essa mesma idéia pode ser aplicada para recalcular novos valores no próprio contorno, com melhor precisão. O procedimento é aqui mostrado para a Equação de Laplace. Resultados numéricos são obtidos na simulação de um problema bidimensional, do qual se dispõe de solução analítica para comparação de desempenho.

Equação Diferencial de Governo

Considere um domínio bidimensional $\Omega(X)$ representando um campo térmico ou mecânico contínuo em condição de regime permanente com propriedades homogêneas e isotrópicas. Sendo $u(X)$ a variável escalar básica ou primal, a equação diferencial de governo é a Equação de Laplace, dada em notação indicial por:

$$u_{,ii} = 0 \quad (1)$$

As condições de contorno essenciais e naturais são expressas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2)$$

$$u_{,i} n_i = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (3)$$

onde n_i é o vetor unitário normal externo ao ponto $X=X(x_i)$ e $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$.

Forma Integral da Equação de Laplace

A partir de fundamentos da Teoria das Equações Integrais (Hildebrand, 1992), é possível reescrever matematicamente a equação (1) em uma forma integral equivalente, dada por:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma \quad (4)$$

Na equação (4), $q(X)$ é a derivada normal do potencial $u(X)$. A equação integral (4) foi obtida considerando-se os procedimentos usuais da formulação direta do MEC (Brebbia et al, 1984), que inclui a adoção de uma função auxiliar $u^*(\xi; X)$ e sua derivada normal $q^*(\xi; X)$, a primeira função sendo a solução de um problema de potencial correlato, governado por uma equação de Poisson, no qual o domínio é infinito e uma fonte concentrada unitária é aplicada no ponto $X=\xi$, isto é:

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi; X) \quad (5)$$

Em duas dimensões tem-se:

$$u^*(\xi; X) = (-1/2\pi) \ln r(\xi; X) \quad (6)$$

$$q^*(\xi; X) = (-1/2\pi r) n_i \quad (7)$$

Nas equações (6) e (7) $r(\xi; X)$ é a distância euclidiana entre o ponto fonte ξ e o ponto campo $X=X(x_i)$.

Na equação integral (4), o ponto fonte está localizado internamente ao domínio $\Omega(X)$. Em termos práticos, o emprego do MEC requer a implementação de um processo básico de discretização e os pontos fonte precisam ser localizados externamente ao domínio ou sobre o contorno, para gerar um sistema matricial de equações compatível. Quando os pontos fonte são posicionados no contorno, as funções $u^*(\xi; X)$ e $q^*(\xi; X)$ apresentam singularidades. Apesar de ser descontínuo, $u^*(\xi; X)$ é integrável ao longo do contorno, mas a integral de $q^*(\xi; X)$ não existe no sentido comum, se o ponto singular é incluído. O procedimento matemático adotado para resolver esse problema consiste em considerar o domínio $\Omega(X)$ aumentado de um setor circular de raio ε , centrado em ξ , e então se tomar o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ [4]. Considerando este contorno estendido, a equação integral (4) pode ser reescrita como:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X) q(X) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma \right\} \quad (8)$$

A terceira integral no lado direito da equação (8) deve ser estudada considerando-se um campo potencial extra $u(\xi)$, tal que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) u(\xi) d\Gamma \right\} \quad (9)$$

Desde que $u(X)$ é uma função contínua, uma expansão em série de Taylor de primeira ordem pode ser feita no primeiro termo do lado direito da igualdade presente na equação (9). Levando em consideração

que no domínio estendido tem-se $r \approx \varepsilon$ e $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\theta$, pode-se fazer:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{[u_{,i}(\xi) \Delta x_i]}{\varepsilon} d\Gamma = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta} \frac{1}{2\pi} u_{,i}(\xi) n_i \varepsilon d\theta = 0 \quad (10)$$

Se $u(x)$ obedece à condição de Holder, a segunda integral do lado direito da igualdade presente na equação (8) existe no sentido de Valor Principal de Cauchy (CPV) (Brebbia et al, 1984). O segundo termo do lado direito da equação (9), por estar no contorno circular, pode ser facilmente integrado, mas é deixado aqui em forma geral, pois caso o ponto ξ se situe numa conexão entre elementos de contorno adjacentes, será dependente do ângulo interno formado entre eles (Wrobel and Aliabadi, 2002). Então, a equação integral para os pontos fonte situados sobre o contorno é dada por:

$$u(\xi) [1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) d\Gamma] = c(\xi) u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi; X) u(X) d\Gamma \quad (11)$$

De acordo com procedimentos operacionais tradicionais com o MEC, a equação (11) é empregada considerando N pontos fonte no contorno, gerando um sistema matricial de equações expresso por:

$$H\theta - GQ = 0 \quad (12)$$

Procedimento Recursivo com o MEC

A solução do sistema matricial (12) permite conhecer o potencial e sua derivada normal em todos os N pontos nodais definidos pelos elementos de contorno empregados na discretização. Com relação ao cálculo de variáveis internas, é possível determiná-las facilmente usando-se uma vez

mais a equação integral (4), com os pontos fonte situados internamente ao domínio. Tal equação, na forma discretizada, inclui os valores do potencial e sua derivada normal ao contorno, já calculados. A precisão numérica do cálculo das variáveis internas é melhor do que a obtida no cálculo dos valores de contorno. A razão matemática para esse comportamento provém do fato de que o uso recursivo da equação integral equivale a uma nova minimização dos erros numéricos cometidos, pois que existe uma associação entre a equação integral de governo (equação (4)) e uma sentença do método dos resíduos ponderados (Brebbia, 1978).

A forma recursiva da equação (11) para o cálculo do potencial no contorno, considerando contornos suaves, fica:

$$(0.5)u(\xi^i) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u^*(\xi^i; X) d\Gamma - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q^*(\xi^i; X) d\Gamma \quad (13)$$

Na equação (13), $\phi_k(X)$ são as funções de forma e Q_k^e e U_k^e são os valores nodais no contorno, previamente determinados. Não apenas os valores do potencial podem ser calculados, mas também as derivadas espaciais com relação às coordenadas x_j (ξ) (ou direções normal e tangencial). O procedimento matemático para a determinação das derivadas espaciais segue os princípios da formulação hiper-singular do MEC (Mansur et al, 1997), que são sintetizados a seguir.

Inicialmente, considere o ponto ξ situado internamente. Tomando-se as derivadas da equação integral (4) e empregando-se a regra de Leibniz, tem-se:

$$u_{,i}(\xi) = q_i(\xi) = \int_{\Gamma} q_{,i}^*(\xi; X) u(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{,i}^*(\xi; X) q(X) d\Gamma \quad (14)$$

onde:

$$u_{,i}^*(\xi; X) = q_{,i}^* = -(1/2\pi r) r_{,i} \quad (15)$$

$$q_{,i}^*(\xi; X) = p_i^* = -(1/2\pi r^2)[2r_{,i} r_{,j} n_j - r_{,i} n_j] \quad (16)$$

Tal como foi feito anteriormente, admite-se a existência de um domínio estendido, consistindo de um setor circular de raio ε , que circunda o ponto fonte ξ . A equação (14) passa a ser escrita como:

$$q_i(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_i^*(\xi; X) u(X) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} p_i^*(\xi; X) u(X) d\Gamma - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} q_i^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} q_i^*(\xi; X) q(X) d\Gamma \right\} \quad (17)$$

Admitindo, por conveniência, a aplicação de um potencial constante $u(\xi)$ por todo o domínio $\Omega(X)$, tem-se:

$$q_i(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_i^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} p_i^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma + \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} q_i^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} q_i^*(\xi; X) q(X) d\Gamma \right\} \quad (18)$$

No contorno estendido $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ a expressão da função $p_i^*(\xi; X)$ torna-se mais simples, pois $r \equiv \varepsilon$ e também:

$$r_{,i} = n_i = r_{,i}/\varepsilon \quad (19)$$

assim:

$$p_i^*(\xi; X) = -(1/2\pi\varepsilon^2)n_i \quad (20)$$

Considerando-se mais uma vez uma expansão em série de Taylor, a segunda integral do lado direito da equação (18) fica:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} p_i^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_e} (-1/2\pi\varepsilon^2)n_i [u_{,j}(\xi)\Delta x_j(\xi)] \varepsilon d\theta \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_e} (-1/2\pi\varepsilon)n_i [u_{,j} n_j(\xi)] \varepsilon d\theta \right\} = \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} (-1/2\pi) n_i [u_{,j} n_j(\xi)] d\theta \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} (-1/2\pi) n_i [q(\xi)] d\theta \right\} \quad (21)$$

Operando-se a última parcela do lado direito da equação (18) chega-se a:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q_i^*(\xi; X) q(X) d\Gamma \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} (-1/2\pi\varepsilon) (r_{,i}) q(X) \varepsilon d\theta \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} (-1/2\pi\varepsilon) (n_i(\xi)) q \varepsilon d\theta \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} (-1/2\pi) (n_i(\xi)) q(X) d\theta \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

As equações (21) e (22) são iguais, pois no setor estendido $x=\xi$ e conseqüentemente $n(X)$ e $n(\xi)$ coincidem. A soma destas integrais pode ser computada analiticamente, fazendo uma integração angular, pois que o raio do setor ε desaparece. A expressão resultante para o caso geral é extensa, dependendo do ângulo definido entre elementos adjacentes, caso o ponto ξ se situe entre ambos (Mansur et al, 1997, Telles e Prado, 1993). Por essa razão, será representada concisamente por $s(\xi)q_i(\xi)$.

Para as integrais remanescentes, nenhuma delas é convergente; no entanto, os dois limites existem quando considerados juntos, no sentido de Valor Principal de Cauchy. Então, considerando os procedimentos anteriores, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} s(\xi)q_i(\xi) = \text{CPV} \left\{ \int_{\Gamma} p_i^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} q_i^*(\xi; X) q(X) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Desde que os valores nos pontos nodais de contorno já foram anteriormente calculados, a equação (23) pode ser reescrita considerando novos pontos fonte, situados recursivamente no contorno:

$$\begin{aligned} s(\xi^j)q_i(\xi^j) = \text{CPV} \left\{ \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q_i^*(\xi^j; X) d\Gamma - \right. \\ \left. - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k p_i^*(\xi^j; X) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Considerando-se contornos suaves, especialmente quando elementos de contorno constantes e retilíneos são empregados, tem-se ao longo deles $s(\xi)=0,5$. No entanto, no procedimento recursivo, independentemente da discretização empregar elementos retilíneos, há possibilidade do ponto fonte poder ser posicionado junto a pontos de conexão, se assim for desejado. O mesmo vale para a equação (13), no caso do potencial ser calculado em pontos angulosos.

Simulação Numérica

Considera-se um domínio semicircular isolado no contorno curvilíneo e sujeito a temperaturas prescritas ao longo da aresta horizontal. Os valores da temperatura prescrita são descontínuos em $r=0$, de acordo com a Figura 1. A malha de elementos de contorno tem 22 elementos constantes. Os nós geométricos dos elementos de contorno foram tomados como novos pontos para a aplicação do esquema recursivo, excluindo os pontos situados nos cantos do contorno horizontal, por conveniência.

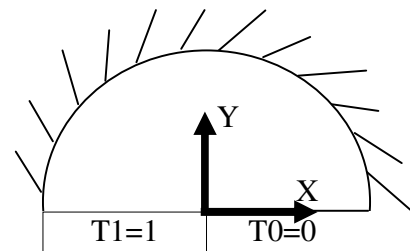


Figura 1: Domínio semicircular sujeito a um campo de temperaturas descontínuo

A Tabela 1 apresenta os resultados analíticos e numéricos para os pontos nodais em que foram prescritos os valores do fluxo normal, todos esses pontos localizados no

contorno circular, distanciados de um ângulo ϕ , medido no sentido trigonométrico. Apesar de ser usando um número relativamente reduzido de elementos de contorno, os resultados numéricos têm boa precisão. Os maiores erros percentuais, apresentados em módulo, foram cometidos na região próxima ao contorno horizontal.

ϕ (°)	NUM.	ANLT.	ER.%
10	.0517	.0555	6,85
30	.1644	.1667	1,38
50	.2764	.2778	0,50
70	.3880	.3889	0,23
85	.4719	.4722	0,06
95	.5281	.5277	0,08
110	.6120	.6111	0,15
130	.7236	.7222	0,19
150	.8355	.8333	0,26
170	.9483	.9444	0,41

Tabela 1 – Temperaturas nos pontos nodais do contorno circular, calculados diretamente.

A Tabela 2 mostra os valores calculados para as derivadas normais ou fluxos em pontos positivos da aresta horizontal. Esses valores têm mesmo módulo e apenas sinal oposto para os valores negativos da coordenada x. Fazendo uma comparação de desempenho com os valores de temperatura anteriormente calculados, verifica-se que houve uma acentuada redução da precisão numérica dos fluxos.

(X,0)	NUM.	ANLT.	ER.%
.350	.0963	.0909	5,89
.250	.1251	.1273	1,73
.175	.1819	.1819	0,00
.125	.2502	.2546	1,73
.750	.3592	.4244	15,36
.250	.1557	.1273	22,31

Tabela 2 – Fluxos nos pontos nodais da aresta horizontal, calculadas diretamente.

A Tabela 3 contém os valores de temperatura no contorno circular, calculados com o uso recursivo da equação integral do

MEC. A comparação entre os resultados mostrados nessa tabela com os apresentados na tabela 1 denota um nível similar de precisão entre ambas. Em princípio, portanto, o procedimento recursivo não apresentou eficiência na melhoria da precisão dos valores de temperatura, que já eram bastante satisfatórios. Deve-se notar que os pontos escolhidos para o cálculo recursivo foram os pontos de conexão entre dois elementos retos, de modo que foi necessário calcular o correto ângulo interno para se determinar $c(\xi)$.

X	Y	NUM.	ANLT.	ER.%
3.76	1.37	.1081	.1111	2,70
3.06	2.57	.2204	.2222	0,81
2.00	3.46	.3323	.3333	0,30
6.95	3.94	.4437	.4444	0,16
0.00	4.00	.5002	.5000	0,00
-6.95	3.94	.5545	.5555	0,18
-2.00	3.46	.6676	.6667	0,14
-3.06	2.57	.7794	.7778	0,20
-3.76	1.37	.8922	.8889	0,37

Tabela 3 – Temperaturas em pontos do contorno circular calculados recursivamente

Na Tabela 4 são mostrados os resultados numéricos do fluxo normal calculados recursivamente em pontos localizados na conexão dos elementos de contorno que compõem a aresta horizontal. Neste caso, o desempenho do procedimento recursivo foi bastante efetivo, apresentando uma precisão superior aos resultados obtidos diretamente pelo MEC (vide Tabela 2).

(X,0)	NUM.	ANLT.	ER.%
3.0	.1056	.1061	0,47
2.0	.1587	.1591	0,25
1.5	.2119	.2122	0,14
1.0	.3181	.3183	0,06

Tabela 4 – Derivadas normais calculadas na aresta horizontal pelo esquema recursivo

Para ratificar o bom desempenho do processo recursivo na determinação do fluxo de calor, foram introduzidos novos pontos de cálculo na aresta horizontal mais próximos do

ponto de singularidade e os resultados comparados com os obtidos com 25 elementos de contorno isoparamétricos lineares, conforme apresenta Halbritter et al (1978). Tais resultados são apresentados na Tabela 5.

(X,0)	REC. CONST.	DIRETO LINEAR	ANLT.
.80	.3977	.3689	.3979
.45	.7072	.6732	.7073
.17	1.872	1.472	1.819
.09	3.537	5.975	3.537

Tabela 5 – Comparação dos resultados obtidos para o fluxo normal através do método recursivo e solução direta com elementos lineares

Pode-se perceber que o procedimento recursivo produziu resultados numéricos para o fluxo de calor melhores do que os elementos lineares, especialmente em pontos próximos à singularidade, confirmando o bom desempenho do procedimento proposto.

Conclusões

É fato bem conhecido que o uso recursivo da equação integral de contorno para calcular valores em pontos internos produz resultados numéricos com melhor precisão do que os resultados obtidos para os pontos nodais no contorno. A razão para esse comportamento é explicada pela equivalência entre o procedimento recursivo e a aplicação de uma nova sentença do método dos resíduos ponderados, minimizando os erros cometidos anteriormente. No entanto, o uso desse procedimento para recalcular os valores de contorno não é discutido na bibliografia especializada do MEC. De acordo com os testes preliminares já realizados, o procedimento recursivo melhora a solução especialmente no cálculo das derivadas normais ou fluxos de calor.

O custo computacional é relativamente baixo, pois nenhum novo sistema de equações é resolvido. As singularidades que surgem na formulação hipersingular podem ser resolvidas

analiticamente ou ainda numericamente, nessa última condição empregando a quadratura de Kutt (1975). Por enquanto, nenhuma restrição foi percebida na colocação dos novos pontos em qualquer posição do contorno, mas deve-se evitar escolher os pontos nodais originais por redundância e pontos de quina nos quais haja dualidade de condições de contorno.

Referências

C.A. Brebbia, J.C. Telles and L.C. Wrobel, "Boundary Element Techniques", Springer Verlag, Berlin, 1984.

A.L. Halbritter, J.C.F. Telles, W.J.Mansur, Boundary Element Application to Field Problems, Conference on Analysis, Design and Construction of Structures of Nuclear Central Stations, Porto Alegre, Brazil, pp 707-724, 1978.

F.B. Hildebrand, "Methods of Applied Mathematics", Dover, New York, 1992.

H.R. Kutt, On the Numerical Evaluation of Finite Part Integrals Involving an Algebraic Singularity, Special Report WISK 179, National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, 1975.

W.J. Mansur, P. Fleury Jr, J.P.S. Azevedo, A Vector Approach to the Hyper-singular BEM Formulation for Laplace's Equation in 2D, International Journal of BEM Communication 8, pp 239-250, (1997).

J.C.F. Telles, A.A. Prado, Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems, Chap 6 of Advanced Formulations in Boundary Element Methods, Elsevier, London, 1993.

L.C. Wrobel and M.H. Aliabadi, "The Boundary Element Method", Wiley, Chichester, 2002.

