Existência e unicidade de solução para um problema elíptico linear.

João Rodrigues dos S. Júnior*
Faculdade de matemática, ICEN, UFPA,
66075-110, Belém, PA
E-mail: jhonyjr18@hotmail.com

RESUMO

Este é um trabalho de iniciação científica e versa sobre a existência e unicidade de solução para o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset R^N$ é um domínio limitado, $f \in L^2(\Omega)$ é dada e $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Mostraremos que esse resultado pode ser demonstrado por dois teoremas clássicos de análise funcional linear, a saber: o teorema da representação de Riesz-Fréchet e o teorema de Lax-Milgran.

Nessas condições, fica bem definido o operador solução

$$\begin{array}{rcccl} S & : & L^2(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ & & f & \longmapsto & S(f) = u \end{array}$$

onde u é a única solução fraca do problema linear acima.

Tal operador possui as seguintes propriedades:

1) S é linear e contínuo.
2) S pode ser visto como um perador definido em $L^2(\Omega)$ e assumindo valores em $L^2(\Omega)$.
3) S é compacto.
4) S é positivo.
5) Os autovalores de S são positivos.
6) S é simétrico.
7) $S(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
8) S admite uma sequência (α_n) de autovalores com $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ e as autofunções associadas, à sequência de autovalores (α_n), formam uma base ortonormal total para $L^2(\Omega)$.
9) $\alpha \in VP(S) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \in VP(-\Delta)$.

Além disso, destacamos algumas propriedades envolvendo os autovalores de S e de $-\Delta$, dentre as quais temos:

- $VP(S)$ é discreto.
- O primeiro autovalor α_1 de $-\Delta$ é o único cujas autofunções associadas têm sinal definido.
- O autoespaço V_{α_1} tem dimensão 1.

Todos os resultados aqui apresentados foram obtidos através de pesquisas bibliográficas.

Referências

[1] C.O.Alves, Introdução às equações elípticas, mini-curso II, UFCG, 2007.

[2] H. Brézis, "Análisis funcional teoría y aplicaciones", Masson, París, 1983.

[3] M. Renardy e R.C. Rogers, "An introduction to partial differential equations", Virginia Polytechnic Institute State University, Blacksburg, 1992.

*bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq