Polinômio dos Quadrados Mínimos Condicionado

Adalberto Ayjara Dornelles Filho
Universidade de Caxias do Sul - Departamento de Matemática e Estatística
Rua Francisco Getúlio Vargas, 1130. 95070-560, Caxias do Sul, RS
E-mail: aadornef@ucs.br

RESUMO

Dado um conjunto de n *pontos dados* (pontos experimentais) $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T$ e t *pontos de ancoramento* $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_t]^T$, $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_t]^T$ construímos um *polinômio* de ordem $m = n - t + 1$

$$P(x) = p_1 x^m + p_2 x^{m-1} + \cdots + p_m x + p_{m+1}$$

de *ajuste dos quadrados mínimos* (QM) aos n pontos dados, *condicionado* a passar pelos t pontos de ancoramento.

O polinômio dos QM condicionado (PQMC) procurado pode ser escrito da forma

$$P(x) = Q(x)R(x) + S(x),$$

onde:

$$S(x) = s_1 x^{t-1} + s_2 x^{t-2} + \cdots + s_{t-1} x + s_t$$

é o polinômio *interpolador* pelos pontos de ancoramento, com ordem $t - 1$;

$$R(x) = (x - u_1)(x - u_2) \cdots (x - u_t),$$

é um polinômio *auxiliar*;

$$Q(x) = q_1 x^{m-t} + q_2 x^{m-t-1} + \cdots + q_{m-t+1},$$

é um polinômio de *ajuste* dos QM *livre* de ordem $m - t$.

O algoritmo para determinação do PQMC procede da seguinte maneira [1]:

(1) Inicialmente, determina os coeficientes $s_1, \ldots, s_t$ do polinômio interpolador $S(x)$.

(2) A partir do vetor $\mathbf{u}$, obtemos a matriz de Vandermonde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1^{t-1} & \cdots & u_1^2 & u_1 & 1 \\ u_2^{t-1} & \cdots & u_2^2 & u_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_t^{t-1} & \cdots & u_t^2 & u_t & 1 \end{bmatrix},$$

e resolve (no sentido clássico) o sistema linear $\mathbf{Us} = \mathbf{w}$.

(3) Determina os coeficientes $q_1, \ldots, q_{m-t+1}$ do polinômio dos QM livre $Q(x)$ observando que

$$R(x_i) q_1 x_i^{m-t} + R(x_i) q_2 x_i^{m-t-1} + \cdots + R(x_i) q_{m-t} = y_i - S(x_i).$$

e resolvendo (no sentido dos MQ) o sistema linear $\mathbf{Aq} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} R(x_1)x_1^{m-t} & R(x_1)x_1^{m-t-1} & \cdots & R(x_1) \\ R(x_2)x_2^{m-t} & R(x_2)x_2^{m-t-1} & \cdots & R(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R(x_{n-1})x_{n-1}^{m-t} & R(x_{n-1})x_{n-1}^{m-t-1} & \cdots & R(x_{n-1}) \\ R(x_n)x_n^{m-t} & R(x_n)x_n^{m-t-1} & \cdots & R(x_n) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{-t} \\ q_{m-t+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 - S(x_1) \\ y_2 - S(x_2) \\ \vdots \\ y_{n-1} - S(x_{n-1}) \\ y_n - S(x_n) \end{bmatrix}.$$

(4) Por fim, os coeficientes $p_1, \ldots, p_{m+1}$ de $P(x)$ são obtidos. Inicialmente, pela convolução do vetor $\mathbf{q}$ (coeficientes de Q) com cada vetor $[1, -u_i]^T$ (coeficientes de R). Em seguida, pela soma (devidamente deslocada) do vetor $\mathbf{s}$ (coeficientes de S). Isso é equivalente às operações algébricas $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$.

O algoritmo, escrito em linguagem MATLAB, está disponível em [1].

Referências

[1] Oclide J. Dotto and Adalberto A. Dornelles Filho. Uma generalização do polinômio dos quadrados mínimos condicionado. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(3):pp. 481 – 483, 2007.