O Teorema de Hille-Yosida e sua Importância na Teoria de Semigrupo de Operadores

Bruno Dias Amaro *
Depto de Matemática, FEIS, UNESP.
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: brunodamaro@yahoo.com.br

Luis Antônio Fernandes de Oliveira
Universidade Estadual Paulista - Departamento de Matemática
15385-000, Campus de Ilha Solteira, Ilha Solteira, SP
E-mail: lafo@mat.feis.unesp.br

RESUMO

Nosso objetivo neste trabalho é mostrar a importância do Teorema de Hille-Yosida, que nos dá condições suficientes para que um operador A seja um gerador infinitesimal de um semigrupo. Para tanto, seja a seguinte:

Definição: Seja E um espaço de Banach. Um **semigrupo de operadores** é uma família de operadores lineares limitados $S(t) : E \longrightarrow E, t \geq 0$, satisfazendo

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad t, s \geq \ 0 \qquad S(0) = I$$

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x, \text{ para qualquer } x \in E \tag{1}$$

onde
$$S(t) = e^{At} \tag{2}$$

Por causa da condição de continuidade de (1), o nome completo do conceito é C_0 - **Semigrupos de operadores**. Entretanto diremos apenas semigrupos de operadores ou ainda mesmo semigrupos. No caso de o espaço E ser de dimensão finita, o operador A em (2) é idêntico à derivada de $S(.)$ em 0, ou seja,

$$\frac{dS}{dt}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} = A$$

A é chamado de **Operador Infinitesimal** ou **Gerador** de $S(t), t \geq 0$. Este não é, em geral, um operador definido em todo o E, mas o domínio $D(A)$ consiste de todos os $x \in E$ para os quais existe o limite

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}$$

e o operador de A é dado pela fórmula

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in D(A)$$

Para simplificar a notação, vamos escrever $A \in G(M, \omega)$, para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo que satisfaz a condição

$$\| \ S(t) \ \| \leq Me^{\omega t}, t \geq 0.$$

Sendo assim temos o seguinte...

Teorema 1 *(Teorema de Hille-Yosida) Se um operador linear A sobre um espaço de Banach X satisfaz:*
∘ A é fechado e denso;
∘ $\exists \ (\lambda I - A)^{-1}, \forall \ \lambda > 0$ e $\| \ (\lambda I - A)^{-1} \ \| \leq \frac{1}{\lambda}$,
onde I é o operador identidade
então A é gerador infinitesimal e um C_0-semigrupo de contrações $S(t)$

A demonstração do teorema abrange toda a teoria acima definida e será detalhada em painel no dia do congresso.

Referências

[1] Cunha. C.R. da, Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP, *Notas em Matemática Aplicada - SBMAC - volume 32*, 2007.

[2] Lunardi, A. ,Introduzione alla teoria dei semigruppi, *Dispense del Dipartimento di Matematica dell´Università di Parma,* 2000.

[3] Zaczyk, J., Mathematical Control Theory: An introduction, *Birkhäuser, 1992.*

*Bolsista de Iniciação Científica - FAPESP