

# Comparação da Resposta Elastodinâmica em Problemas Bidimensionais Resolvidos pelo Método dos Elementos de Contorno por Reciprocidade Dual e Integração Direta

Eliana Maria de Mello Francisco Rossi

DES - FEC - UNICAMP  
13083-970 - Campinas - SP - Brasil  
[nany@fec.unicamp.br](mailto:nany@fec.unicamp.br)

Isaías Vizotto

DES - FEC - UNICAMP  
13083-970 - Campinas - SP - Brasil  
[vizotto@fec.unicamp.br](mailto:vizotto@fec.unicamp.br)

## RESUMO

A equação integral de contorno que governa o comportamento dinâmico do corpo homogêneo, elástico-linear e isotrópico é escrita como :

$$C_{ki} u_i = \int_{\Gamma} \hat{u}_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{ki}^* u_i d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \hat{u}_{ki}^* \ddot{u}_i d\Omega$$

$C_{ki}$ : coeficiente relacionado à forma do contorno,  $\hat{u}_{ki}^*, \hat{p}_{ki}^*$ : deslocamento e forças de superfície correspondentes à solução fundamental,  $\ddot{u}_i$ : aceleração,  $\Gamma$ : contorno e  $\Omega$ : domínio.

O objetivo deste trabalho é a comparação dos resultados obtidos quando se resolve as integrais de domínio que aparecem no último termo da direita da equação acima através de duas técnicas:

1) Integração Direta: aproxima os termos inerciais incógnitos por polinômios interpoladores parametrizados em células. A integral é substituída por [2]:

$$\sum_{m=1}^{NC} \left\{ \rho \int_{\Omega_m} \hat{u}_{ki}^* K d\Omega \right\} \ddot{U}_j^m$$

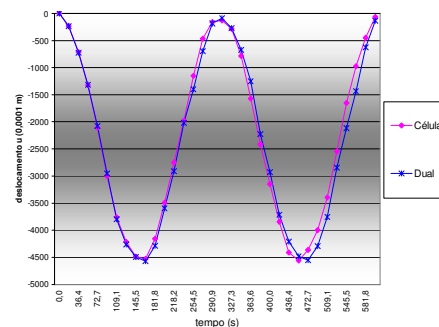
NC é o número de células,  $K$  é a matriz de forma,  $\rho$  é a densidade.

2) Reciprocidade Dual: emprega a solução fundamental da estática, associada a um procedimento de substituição de variáveis, que elimina as integrais de domínio mediante a aplicação do Teorema da Reciprocidade de Betti uma outra vez [1]. Esse método propõe o uso de uma série de funções particulares para a função deslocamento. Nesse trabalho foram usadas as funções radiais, escritas em termos da distância Euclidiana entre dois pontos. A integral fica com núcleos semelhantes às obtidas na solução estática:

$$\rho \left\{ c_{ki} \psi_{ii}^j + \sum_{e=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_e} \hat{p}_{ki}^* \phi^T d\Gamma \psi_{ii}^j - \int_{\Gamma_e} \hat{u}_{ki}^* \phi^T d\Gamma \eta_{ii}^j \right] \right\} \ddot{\alpha}_i^j$$

$\psi_{ii}^j, \eta_{ii}^j$ : deslocamentos e forças de superfície dependentes da função interpoladora da dual.

Análise da viga engastada simples com 12 m de vão e 3 m de altura com carga de 9 kN aplicada subitamente na extremidade livre da viga e mantida no local indefinidamente. No gráfico mostram-se os deslocamentos do ponto central da extremidade livre, usando as duas técnicas.



Comparando os resultados, pode-se dizer que a resposta obtida com a reciprocidade dual está em ótima concordância com o método de células, que discretiza todo o domínio.

## Referências

- [1] Nardini, D., Brebbia, C.A.. Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamics Analysis. Topics in Boundary Element Research-2, Berlin, 1985.p191-208.
- [2] Coda, H.B. Análise da Vibração Livre de Meios Elásticos Bidimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno. Dissertação Mestrado em Engenharia de Estruturas - Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1990. 130p.