Cálculo Proposicional: Novas Propriedades das Operações Lógicas

Vera Jussara Lourenzi
Rosana Maria Luvezute Kripka
Neuza Terezinha Oro
Universidade de Passo Fundo - Instituto de Ciências Exatas e Geociências
99001-970, Campus I, Passo Fundo, RS
E-mail: vjlm@upf.br, rkripka@upf.br, neuza@upf.br

Resumo *Na exploração do uso do diagrama de Allan Marquand no cálculo proposicional percebeu-se, no processo de obtenção de fórmulas equivalentes simplificadas, a necessidade de duas novas propriedades envolvendo as operações de conjunção e disjunção. Foram encontradas fórmulas proposicionais que, através do diagrama de Allan Marquand, tinham fórmulas equivalentes, as mais simplificadas possíveis, as quais não eram obtidas de forma direta com a aplicação das propriedades das operações lógicas já existentes. Investigando sobre a simplificação de várias fórmulas do tipo citado anteriormente, observou-se a regularidade dos termos e de operadores lógicos, o que permitiu verificar a existência das novas propriedades, apresentadas a fim de que a simplificação possa ser percebida com facilidade e realizada de forma direta. Dessa forma, neste artigo as duas novas propriedades e a demonstração das mesmas..*

Palavras-chave*: Cálculo Proposicional. Propriedades das Operações Lógicas. Relação de Equivalência.*

1. Introdução

No cálculo proposicional algébrico, as propriedades das operações lógicas constituem-se numa importante ferramenta na demonstração de equivalências, sendo indispensáveis na simplificação de fórmulas proposicionais.

Através de pesquisa desenvolvida na Universidade de Passo Fundo sobre o uso do diagrama de Allan Marquand e suas vantagens em relação aos métodos clássicos no cálculo proposicional, teve-se a oportunidade de investiga

r e comprovar a existência de novas propriedades envolvendo as operações de conjunção e disjunção. A construção, o uso e as vantagens do uso do referido diagrama foram apresentadas em trabalhos anteriores ([6] e [7]). Nestes trabalhos, uma dessas vantagens refere-se à obtenção de fórmulas equivalentes. Através do diagrama de Allan Marquand é possível a obtenção de várias fórmulas equivalentes a uma dada fórmula proposicional ,entre essas as mais simples.

O uso das propriedades das operações lógicas também permite encontrar várias fórmulas equivalentes a uma dada fórmula proposicional, inclusive as mais simples. Porém, há casos em que a obtenção da menor fórmula equivalente através das propriedades é trabalhosa e, mesmo que se tenha grande habilidade, o processo não é direto, nem de fácil percepção, tal como nos casos que são apresentados no presente artigo.

2. Revisão de literatura

O precursor da lógica simbólica, conforme se pode ver em Blanché [1], foi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), o qual tinha como projeto construir uma linguagem universal, que se constituísse num sistema de símbolos gráficos tal que "como o alfabeto dos pensamentos humanos e graças aos quais mesmo os nossos mais complexos pensamentos possam escrever-se de maneira plenamente racional" (1985, p. 210).

Desde a Idade Média, além da discussão de teorias que envolviam o raciocínio lógico, já se pensava em elaborar regras de inferência para formalização da lógica geral ([5]).

Com as obras de George Boole (1815-1864), *Las leyes del pensamiento,* publicada em 1854, e de Gottlob Frege (1848-1925), a lógica matemática teve seu surgimento. Boole propôs que fossem transportadas para a lógica a notação e as leis da álgebra, de forma a possibilitar a conversão das proposições categóricas em equações e os silogismos, em sistemas de equações, cuja solução seria possível por métodos algébricos. ([4]).

No entanto, a primeira axiomatização totalmente formalizada da lógica deve-se a Gottlob Frege, o qual se baseou e superou os ensaios de Aristóteles, Liebniz e Boole ([4]) e foi o primeiro sistema realmente extenso da lógica formal, publicado com o título *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen denkess*, em 1879 ([5]) (Blanché, entre outros, menciona Frege como criador da lógica moderna). A axiomatização da lógica dos enunciados foi realizada no século XX e os principais colaboradores foram Whitehead – Russel (1910), Hilbert – Bernays (1934) e Lukasiewicz (1929) ([4]).

Jonh Venn (1834-1923) foi simpático à lógica de Boole e propôs ilustração da álgebra lógica através de diagramas. Tomou círculos de Euler para fazer interpretação de termos e de proposições, tendo constatado que esses se prestavam para representar ou expressar as operações lógicas, mas não serviam para interpretar raciocínios mais complexos. Afirmou Blanché [1]: “A figuração por círculos só convém para a combinação de dois ou três termos, no máximo. Isso basta para o silogismo, mas não já para raciocínios um pouco mais complexos em que o número de termos é maior” (1985, p. 289).

Na mesma época, além dos círculos de Euler utilizados por Venn, outros diagramas foram propostos. Allan Marquand, em 1881, Alexander MacFarlane, em 1855, e Lewis Carrol, em 1886, propuseram diagramas retangulares que, do cálculo das classes, podiam ser transportados para o cálculo das proposições ([1], [2] e [3]). Entretanto, as limitações encontradas no uso dos círculos de Euler causaram o abandono do uso dos diagramas no cálculo dos predicados e das proposições.

L. Wittgenstein e E.L.Post, nos primeiros anos do século XX, resolveram o problema do cálculo das proposições com a tabela-verdade ou matriz de verdade. O uso da tabela-verdade constitui-se num processo de decisão no cálculo das proposições sem recorrência a axiomas. Segundo Blanché [1], “pode-se, com efeito, utilizar essas tabelas para reconhecer, de uma maneira direta que dispensa que se percorra uma cadeia demonstrativa mais ou menos longa, se uma dada fórmula de cálculo é ou não uma lei lógica.” (1985, p. 352)

Da mesma forma que os círculos de Euler mostraram-se inadequados quando o número de termos era grande, por ser difícil a representação, a tabela-verdade é inadequada para uma fórmula proposicional com um grande número de letras proposicionais, por ser um trabalho demasiadamente exaustivo. Diante dessa dificuldade, o cálculo algébrico continuou sendo utilizado como o melhor recurso pela maioria dos lógicos.

Entretanto, o uso dos diagramas retangulares, abandonados como recurso para o cálculo de termos e de proposições, tem sido adotado como recurso metodológico no sentido de facilitar o processo de aprendizagem da lógica. É o caso da proposta constante no livro *Lógica,* do Conselho Nacional de Professores de Matemática do México (1970) , no qual se encontra somente a representação das operações lógicas nos diagramas retangulares [8].

Pedroso [9] faz uso desse mesmo instrumental, chamando-o de “gráfico de Gonseth”, na álgebra dos interruptores. Da mesma forma que no livro do Conselho Nacional de Professores de Matemática, faz somente a representação dos juntores binários - operadores (1993, p.59 - 60).

As atividades desenvolvidas na disciplina de Lógica nos cursos de Matemática e Ciência da Computação da UPF têm servido para demonstrar que o diagrama retangular de Marquand pode ser utilizado com grandes vantagens em relação aos métodos tradicionais.

A construção, uso e vantagens do uso do diagrama, no cálculo proporcional, encontram-se em artigo e livro publicados anteriormente ([6] e [7]). No processo de investigação sobre as vantagens do uso do diagrama de Marquand foi possível identificar a necessidade de definição de duas novas propriedades relativas às operações de conjunção e disjunção inclusiva, a fim de que o processo de simplificação de algumas fórmulas proposicionais fosse realizado de forma direta.

Esse trabalho apresenta duas novas propriedades, as demonstrações dessas, através da aplicação de propriedades clássicas, o que foi possível de forma indireta, do uso de tabela-verdade e também do uso do diagrama de Allan Marquand. Para ilustrar a aplicação dessas novas propriedades também se apresentam alguns exemplos, nos quais a sua existência se faz necessária.

3. Demonstração das novas propriedades

Sendo *p, q, r* letras proposicionais, são válidas as seguintes propriedades para conjunção $(\wedge)$ e disjunção inclusiva $(\vee)$:

$$(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

$$(p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$$

Para demonstrar as equivalências apresentadas, faz-se uso de tabela-verdade, do diagrama de Allan Marquand e de propriedades das operações lógicas. Para facilitar as demonstrações indica-se:

$A : (p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r))$

$B : (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$

$C : (p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r))$

$D : (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$

3.1 Demonstração da propriedade (i)

$$(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

a) Por tabela-verdade

Mostra-se que as tabela-verdades de A e B possuem os mesmos resultados, ou seja, que A e B são equivalentes (Tabelas 1 e 2).

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$((p$	$\wedge$	$r)$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$\sim r))$
V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	F	F
V	V	V	**V**	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	**V**	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	**F**	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	**F**	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	**V**	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	**F**	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	**F**	F	F	F	F	F	F	V

Tabela 1: Tabela-verdade de A

$(p$	$\wedge$	$r)$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$\sim r)$
V	V	V	**V**	V	F	F
V	F	F	**V**	V	V	V
V	V	V	**V**	F	F	F
V	F	F	**F**	F	F	V
F	F	V	**F**	V	F	F
F	F	F	**V**	V	V	V
F	F	V	**F**	F	F	F
F	F	F	**F**	F	F	V

Tabela 2: Tabela-verdade de B

b) Pelo diagrama de Allan Marquand

Mostra-se que os diagramas de A e B possuem os mesmos conteúdos lógicos, ou seja, que A e B são equivalentes (ver Figuras 1 (a) e 1 (b)). Para representar o conteúdo lógico de A e B, utilizaram-se os seguintes símbolos:

$\circ$ para $(p \wedge q)$

$+$ para $(p \wedge r)$

Δ para $(q \wedge \sim r)$

$\oplus$ para $(p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$

▨ para A $: (p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r))$

▧ para B $: (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$

c) Pelas propriedades das operações lógicas

Mostra-se que, simplificando a fórmula A, através da aplicação de propriedades das operações lógicas, obtém-se a fórmula equivalente B.

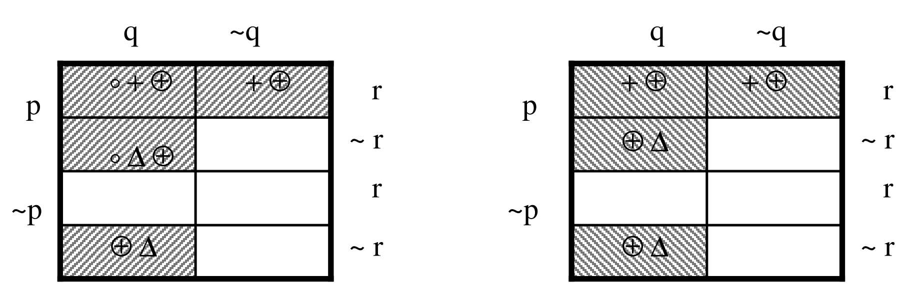
Demonstração da propriedade (i) através de cálculo algébrico:

$A : (p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r))$

$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r) \equiv (\text{Ass.})$

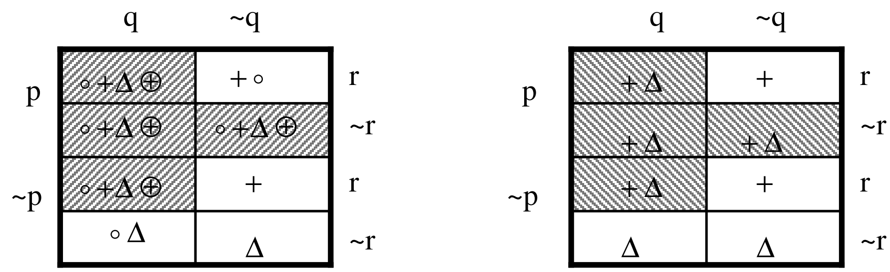
$\equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge V$

$\equiv (\text{P. do V})$



a) conteúdo lógico de A. b) conteúdo lógico de B.

Figura 1: Representação gráfica no diagrama de Allan Marquand da equivalência do caso (i)



a) conteúdo lógico de C b) conteúdo lógico de D

Figura 2: Representação gráfica no diagrama de Allan Marquand da equivalência do caso (ii).

$\equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge$
$\wedge ((p \wedge r) \vee \sim (p \wedge r)) \equiv$ (Tautologia)
$\equiv (((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (p \wedge r)) \vee$
$\vee (((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim (p \wedge r))$
$\equiv$ (Distr.)
$\equiv (p \wedge r) \vee (((p \wedge q) \wedge (p \wedge r) \vee$
$\vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim (p \wedge r)) \equiv$ (Absorção)
$\equiv (p \wedge r) \vee (((p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge r)) \vee$
$\vee ((p \wedge r) \wedge \sim (p \wedge r)) \vee ((q \wedge \sim r) \wedge \sim (p \wedge r)))$
$\equiv$ (Distr.)
$\equiv (p \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge r)) \vee F \vee$
$\vee ((q \wedge \sim r) \wedge \sim (p \wedge r)) \equiv$ (Ass./contradição)
$\equiv (p \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim r)) \vee$
$\vee ((q \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim r)) \equiv$ (Morgan, P. do F)
$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge (p \wedge (\sim p \vee \sim r))) \vee$
$\vee (q \wedge (\sim r \wedge (\sim p \vee \sim r))) \equiv$ (Ass./com.)
$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge ((p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r))) \vee$
$\vee (q \wedge \sim r) \equiv$ (Dist., Absorção)
$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge (F \vee (p \wedge \sim r))) \vee$
$\vee (q \wedge \sim r) \equiv$ (Contradição)
$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge (p \wedge \sim r)) \vee (q \wedge \sim r)$
$\equiv$ (P. do F)
$\equiv (p \wedge r) \vee ((q \wedge \sim r) \vee ((q \wedge \sim r) \wedge p))$
$\equiv$ (Com., Ass.)
$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$: B (Absorção)

Logo:
$(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$

Observe-se que a demonstração, através da aplicação das propriedades das operações lógicas, além de ser longa e exigir habilidade, necessita de inclusão de novo termo; no caso, foi inserido V na segunda linha, o qual foi substituído por $((p \wedge r) \vee \sim (p \wedge r))$ na terceira linha da demonstração, para que as simplificações pudessem ser realizadas.

3.1 Demonstração da propriedade (ii)
$(p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$

a) Por tabela-verdade

Mostra-se que as tabelas-verdade de C e D possuem os mesmos resultados, ou seja, que são equivalentes (Tabela 3 e 4).

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$((p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\sim r))$
V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	V	F
V	V	V	**V**	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	**F**	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	**V**	V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	**V**	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	**F**	F	F	F	F	V	V	V
F	F	F	**F**	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	**F**	F	F	F	F	F	V	V

Tabela 3: Tabela-verdade de C

$(p$	$\vee$	$r)$	$\vee$	$(q$	$\vee$	$\sim r)$
V	V	V	**V**	V	V	F
V	V	F	**V**	V	V	V
V	V	V	**F**	F	F	F
V	V	F	**V**	F	V	V
F	V	V	**V**	V	V	F
F	F	F	**F**	V	V	V
F	V	V	**F**	F	F	F
F	F	F	**F**	F	V	V

Tabela 4: Tabela-verdade de D

b) Pelo diagrama de Allan Marquand

Mostremos que os diagramas de C e D possuem os mesmos conteúdos lógicos, ou seja, C e D são equivalentes (ver Figuras 2 (a) e 2 (b)). Para representar o conteúdo lógico de C e D foram utilizados os seguintes símbolos:

$\circ$ *para* $(p \vee q)$

$+$ *para* $(p \vee r)$

Δ *para* $(q \vee \sim r)$

$\oplus$ *para* $(p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$

para C: $(p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r))$

para D: $(p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$

c) Pelas Propriedades das Operações Lógicas

Mostra-se que, simplificando a fórmula C através da aplicação de propriedades das operações lógicas, obtém-se a fórmula equivalente D.

Demonstração da propriedade (ii) através de cálculo algébrico:

$C: (p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \equiv$
$\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r) \equiv$ (Ass.)
$\equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \vee F$
$\equiv$ (P. do F)
$\equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \vee$
$\vee ((p \vee r) \wedge \sim (p \vee r)) \equiv$ (Contradição)
$\equiv ((p \vee r) \wedge ((p \vee q) \wedge (q \vee \sim r))) \vee$
$\vee ((p \vee r) \wedge \sim (p \vee r)) \equiv$ (Com./Ass.)
$\equiv (p \vee r) \wedge (((p \vee q) \wedge (q \vee \sim r)) \vee$
$\vee (\sim p \wedge \sim r)) \equiv$ (Distr./Morgan)
$\equiv (p \vee r) \wedge ((q \vee (p \wedge \sim r)) \vee (\sim p \wedge \sim r))$
$\equiv$ (Distr.)
$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee ((p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim r)))$
$\equiv$ (Ass.)
$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee (\sim r \wedge (p \vee \sim p)))$
$\equiv$ (Distr.)
$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee (\sim r \wedge V)) \equiv$ (Tautologia)
$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$ (Propr. do V)

Logo:
$(p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$

Observe-se que a demonstração através da aplicação das propriedades das operações lógicas, também nesse caso, além de ser longa e exigir habilidade, necessita da inclusão de um novo termo, no caso F, na segunda linha, o qual foi substituído por $((p \vee r) \wedge \sim (\sim p \vee r))$ na terceira linha da demonstração, para que as simplificações pudessem ser realizadas.

4. Exemplos de Aplicação

4.1 Simplificação da Fórmula A, onde:

$A: ((\sim p \vee s) \rightarrow ((q \vee p) \wedge (p \wedge r))) \vee$
$\vee ((s \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow \sim q) \wedge \sim r) \equiv$
$\equiv (\sim (\sim p \vee s) \vee ((q \vee p) \wedge (p \vee r))) \vee$
$\vee ((\sim s \vee q) \wedge (\sim s \vee \sim q) \wedge \sim r) \equiv$ (Implicação)
$\equiv ((p \wedge \sim s) \vee ((q \vee p) \wedge (p \wedge r))) \vee$
$((\sim s \vee (q \wedge \sim q)) \wedge \sim r) \equiv$ (Morgan/Distr.)
$\equiv ((p \wedge \sim s) \vee (((q \vee p) \wedge p) \wedge r)) \vee$
$\vee ((\sim s \vee F) \wedge \sim r) \equiv$ (Ass./Contradição)
$\equiv ((p \wedge \sim s) \vee (p \wedge r)) \vee (\sim s \wedge \sim r)$
$\equiv$ (Absorção/P. do F)
$\equiv A': (p \wedge \sim s) \vee ((p \wedge r) \vee (\sim s \wedge \sim r)) \equiv$ (*Ass.*)
$\equiv A'': (p \wedge r) \vee (\sim s \wedge \sim r)$ (Nova Propriedade)

A representação do conteúdo no diagrama de Allan Marquand da fórmula A ou de suas equivalentes simplificadas, A' e A'' pode ser visualizado na Figura 3(a). Observe que na simplificação da fórmula A, onde foi utilizada a nova propriedade, fez-se a exclusão de $(p \wedge \sim s)$, cujo conteúdo lógico está incluso no conteúdo lógico de $(p \wedge r) \vee (\sim s \wedge \sim r)$, o que pode ser conferido no diagrama da Figura 3 (a).

4.2 Simplificação da fórmula B, onde:

B: $(\sim q \wedge (\sim r \rightarrow (p \wedge s))) \vee$
$\vee (p \wedge (r \rightarrow (\sim q \wedge s))) \equiv$
$\equiv (\sim q \wedge (r \vee (p \wedge s))) \vee$
$\vee (p \wedge (\sim r \vee (\sim q \wedge s))) \equiv$ (Implicação)
$\equiv ((\sim q \wedge r) \vee (\sim q \wedge (p \wedge s))) \vee$
$\vee ((p \wedge \sim r) \vee (p \wedge (\sim q \wedge s))) \equiv$ (Distr.)
$\equiv (\sim q \wedge r) \vee (\sim q \wedge p \wedge s) \vee$
$\vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge s) \equiv$ (Ass.)
$\equiv (\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \vee$
$\vee ((p \wedge \sim q \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge s)) \equiv$ (Com./Ass.)
$\equiv ((\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)) \vee$
$\vee ((p \wedge \sim q) \wedge s) \equiv$ (Ass./Idempotente)

$$\equiv (((\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)) \vee (p \wedge \sim q)) \wedge$$
$$\wedge (((\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)) \vee s) \equiv \text{(Distr.)}$$
$$\equiv ((\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)) \wedge$$
$$\wedge (((\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)) \vee s) \equiv \text{(Nova Propriedade)}$$
$$\equiv (\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \quad \text{(Absorção/Ass.)}$$

A representação do conteúdo no diagrama de Allan Marquand da fórmula B ou de suas equivalentes simplificadas pode ser visualizada na Figura 3(b). Observe que na última simplificação, onde foi utilizada a nova propriedade, fez-se a exclusão de $(p \wedge \sim q)$, cujo conteúdo lógico está incluso no conteúdo lógico de $((\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r))$, o que pode ser conferido no diagrama da Figura 3(b).

4.3 Simplificação da fórmula C, onde:

$$C\text{: } (p \vee r) \wedge (p \rightarrow (q \vee \sim r)) \wedge$$
$$\wedge (\sim p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \equiv$$
$$\equiv (p \vee r) \wedge (\sim p \vee (q \vee \sim r)) \wedge$$
$$\wedge (p \vee q) \wedge (\sim r \vee q) \equiv \quad \text{(Implicação)}$$
$$\equiv ((p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r))) \wedge$$
$$\wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \equiv \quad \text{(Com./Ass.)}$$
$$\equiv (p \vee r) \wedge ((q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee (q \vee \sim r)))$$
$$\equiv \text{(Nova Propriedade/ Ass.)}$$
$$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r) \quad \text{(Absorção)}$$

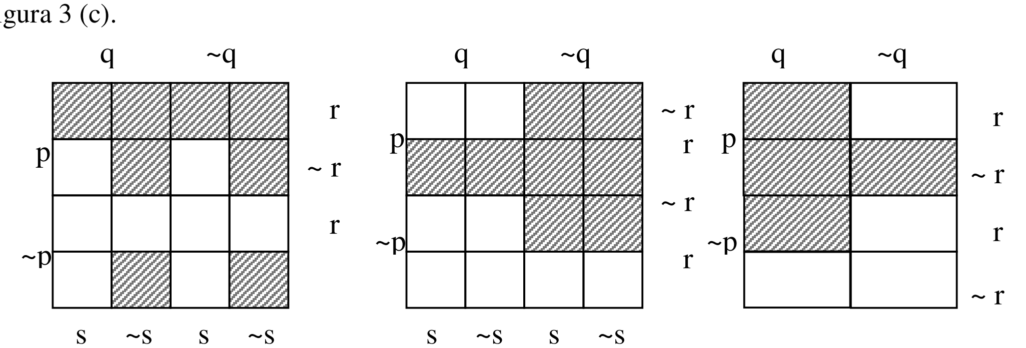
A representação do conteúdo no diagrama de Allan Marquand da fórmula C ou de suas equivalentes simplificadas pode ser visualizada na Figura 3 (c). Observe-se que, no termo em que foi aplicado a nova propriedade, fez-se a exclusão do termo $(p \vee q)$, cujo conteúdo lógico inclui o conteúdo lógico de $((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r))$, o que pode ser conferido no diagrama da Figura 3 (c).

5. Considerações finais

A equivalência entre fórmulas proposicionais semelhantes às apresentadas no artigo foi percebida num primeiro momento somente em simplificações realizadas através do uso do diagrama de Allan Marquand.

Quando se tentava a simplificação de tais fórmulas utilizando as propriedades existentes na literatura, ela não era obtida de forma direta, o que era possível com o diagrama. Investigou-se, então, como seria realizada a simplificação, de tais fórmulas, com o uso das propriedades já existentes e percebeu-se que existia a necessidade de inclusão de termos que permitissem tais simplificações, assim como no caso da demonstração da propriedade da absorção, onde é necessário acrescentar termos para se efetivar a simplificação que tal propriedade permite.

Como eram conhecidas as expressões das fórmulas simplificadas, no caso (i), incluiu-se, através da conjunção uma tautologia envolvendo um dos termos da fórmula simplificada e, no caso (ii), incluiu-se, através da disjunção, uma contradição envolvendo um dos termos da fórmula já simplificada. Essas inclusões permitiram que as fórmulas fossem simplificadas de forma indireta. Assim, estamos apresentando neste artigo duas novas propriedades, as quais estão demonstradas e exemplificadas, para que no cálculo algébrico as simplificações de fórmulas proposicionais que tenham estrutura semelhantes às fórmulas apresentadas possam ser realizadas de forma direta.



(a) Fórmula A ou equivalentes (b) Fórmula B ou equivalentes. (c) Fórmula C ou equivalentes

Figura 3: Representação do conteúdo lógico no diagrama de Allan Marquand

Pode ser observado, pelos diagramas de Allan Marquand, que, no caso (i), a representação do conteúdo lógico de $(p \wedge q)$ de A está incluso na representação da fórmula já simplificada, B. No caso (ii), a representação do conteúdo lógico de $(p \vee q)$ de C inclui o conteúdo lógico de D, sendo, dessa forma, desnecessário na expressão de C.

A nova propriedade (i) é válida para disjunção de termos conjuntivos em que as letras proposicionais p e q do termo excluído $(p \wedge q)$ aparecem nos demais termos em conjunção com uma terceira letra proposicional, afirmativa num deles e negativa no outro; e a nova propriedade (ii) é válida para a conjunção de termos disjuntivos em que as letras proposicionais p e q do termo excluído $(p \vee q)$ aparecem nos demais termos em disjunção com uma terceira letra proposicional, afirmativa num deles e negativa no outro.

As novas propriedades que estão apresentadas neste artigo foram obtidas através da investigação da simplificação de várias fórmulas proposicionais, onde se observou a regularidade de termos e operadores lógicos, o que possibilita que a simplificação de tais fórmulas seja de fácil percepção e de realização direta.

Referências

[1] BLANCHÉ, Robert. “História da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell”. Lisboa: Edições 70, 1985.

[2] CARROLL, Lewis. **“**Lewis Carroll**:** el juego de la lógica y outros escritos”. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

[3] GARDNER, Martin. “Logic machines and diagrams”. USA: McGraw-Hill, 1958.

[4] GARRIDO, Manuel. “Lógica simbólica”, 3. ed. Madrid: Tecnos, 1995.

[5] KNEALE, Willian; KNEALE, Martha. “O desenvolvimento da Lógica”. 3ª ed. Coimbra: Gráfica de Coimbra, 1991, p.418.

[6] MÜHL, Vera. Jussara. Lourenzi; KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; Neuza Terezinha Oro. “Aplicações do Diagrama de Allan Marquand na Lógica Matemática”. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2007.

[7] MÜHL, Vera. Jussara. Lourenzi. ; SETTI, Betine Diehl; KRIPKA, Rosana Maria Luvezute. Diagrama de Allan Marquand no cálculo proposicional. “Boletim de Educação Matemática”, Rio Claro, ano 17, nº 21, p. 45-60, 2004.

[8] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. “Lógica”. México: Editorial F. Trilhas, 1970.

[9] PEDROSO, Dagmar Souza. “Iniciação à lógica matemática: cálculo sentencial, Lukasiewicz’s parenthesis-Free notation e árvores lógicas.” Porto Alegre: Gráfica e Editora NBS, 1993.