Uma Aplicação do Teorema de Krein-Milman no $\mathbb{R}^n$

Ulcilea Alves Severino* Luiz Fernando de Souza Freitas
Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: ulcilea0803@hotmail.com, luzaofsf@hotmail.com

Marcela Luciano Vilela de Souza (orientadora)
FEIS, UNESP, Departamento de Matemática
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: marcela@mat.feis.unesp.br

RESUMO

Na Matemática, mais precisamente na Análise Funcional, o Teorema de Krein-Milman é um resultado que envolve subconjuntos convexos e compactos de um espaço vetorial topológico localmente convexo.

O objetivo deste trabalho é estudar uma versão do Teorema de Krein-Milman no contexto do $\mathbb{R}^n$ para uma aplicação deste resultado na caracterização dos pontos de máximos e mínimos de funcionais afins definidos num compacto do $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, esta aplicação determina que todo funcional afim definido em um subconjunto compacto K do $\mathbb{R}^n$ atinge seu máximo e mínimo em pontos extremais de K.

Definições:

1) **Envoltória convexa**: Dado um subconjunto não vazio A de um espaço vetorial X, chamaremos de **envoltória convexa** de A um conjunto que denotaremos por $conv[A]$ e que satisfaz: i) $conv[A]$ é convexo; ii) $A \subset conv[A]$; iii) Se K é um conjunto convexo tal que $A \subset K$, então $conv[A] \subset K$.

2) **Aplicação Afim**: Sejam X e Y espaços vetoriais . Uma aplicação $T : X \to Y$ é **afim** se verificar a propriedade $T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T(x_k)$ para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

3) **Conjunto Compacto**: Um espaço normado X é dito **compacto** se toda sequência em X tem uma subsequência convergente.

4) **Ponto Extremal**: Seja K um subconjunto convexo de um espaço vetorial X um ponto $\omega \in K$ é um **ponto extremal** de K se $\omega = (1-\lambda)\,x + \lambda y$, onde $x, y \in K$ e $0 < \lambda < 1$, implicar que $\omega = x = y$. Ou seja, $\omega \in K$ é um ponto extremal de K se não for ponto interno de nenhum segmento que una pontos de K, ou ainda, se não for combinação convexa de pontos de K.

Notação: Indicaremos por $ext(K)$ o conjunto dos pontos extremais de K.

Teorema de Krein-Milman (em $\mathbb{R}^n$): Seja K um subconjunto convexo e compacto do $\mathbb{R}^n$. Então $K = \overline{conv}[ext\,(K)]$.

Uma Aplicação:

Teorema: Seja Φ um funcional afim definido em um subconjunto compacto K do $\mathbb{R}^n$. Então, existem pontos extremais $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tais que $\Phi(\overline{x}) = \max_{x \in K} \Phi(x)$ e $\Phi(\overline{y}) = \min_{x \in K} \Phi(x)$.

Referências

[1] D.L. Fernandez, Convexidade e algumas de suas aplicações, UNICAMP-2000.

[2] J.Stoer & Witzgall, Convexity and Optimization in Finite Dimension. Springer Verlag. Heibelberg, 1970. (UNICAMP) - 2003.

*bolsista de Iniciação Científica FAPESP