

Uma Fundamentação Intervalar Aplicada à Morfologia Matemática

Marcia M. C. Cruz

UFRN – Departamento de Matemática
Campus Universitário Lagoa Nova
59072-970, Natal, RN
E-mail: marcia@ccet.ufrn.br

Adrião D.D. Neto

UFRN – Departamento de Computação e Automação
Campus Universitário Lagoa Nova
59072-970, Natal, RN
E-mail: adriao@dca.ufrn.br

Regivan H. N. Santiago, Benjamín R. C. Bedregal

UFRN - Departamento de Informática e Matemática Aplicada
Campus Universitário Lagoa Nova
59072-970, Natal, RN
E-mail: {regivan,bedregal}@dimap.ufrn.br.

1 Introdução

O modelo morfológico para abordagem de problemas de análise de imagem está baseado na extração de informações de imagens a partir de transformações de formas, estruturado na teoria dos conjuntos e na álgebra dos reticulados. Proposta por Matheron e Serra, as dilatações e erosões são usadas para a criação de transformações mais sofisticadas. Essas transformações por sua vez, levaram a vários resultados importantes do ponto de vista de análise de imagens, dentre estes, pode-se citar os filtros morfológicos, o preenchimento de buracos, extração de contornos e reconhecimento de padrões. Algumas importantes abordagens sobre morfologia matemática podem ser encontradas em [1, 2, 4, 5].

Neste trabalho estamos apresentando um modelo intervalar para lidar com incertezas em algumas técnicas de processamento de imagem, através da morfologia matemática. Nossa principal meta é então construir um modelo no qual seja possível usar técnicas intervalares para tratar com incertezas em imagens e que poderá ser aplicado em operações morfológicas, como por exemplo filtros de imagens corrompidas por ruídos.

As incertezas serão representadas através de intervalos de confiança e nesse trabalho faremos uso da aritmética intervalar para realizar as operações necessárias. Em geral a teoria intervalar fornece um mecanismo para representar e manipular algum tipo de incerteza, principalmente aquelas originadas por disseminação de dados contínuos e por propagação destas incertezas. A discretização de dados contínuos em um número finito de valores é freqüentemente requerida por máquinas de algoritmos de aprendizagem, Redes Bayesianas [9, 14]. Dados experimentais são tipicamente contínuos, ou representados por números de pontos flutuantes. Existem diversas abordagens sobre controle de incertezas em tratamento de imagens. Os mais conhecidos métodos utilizados pela morfologia matemática por exemplo, são realizados através da teoria dos conjuntos fuzzy, wavelets e modelos probabilístico, mas nenhum ainda usando a teoria da aritmética intervalar.

Os conjuntos fuzzy são os mais tradicionais modelos para tratamento de informações vagas e inexatas. Este modelo foi introduzido por Zadeh em [10] quando ele observou a impossibilidade de modelar sistemas com fronteiras mal definidas de acordo com as abordagens matemáticas clássicas

[6, 12, 13]. A representação com conjuntos fuzzy são mais apropriadas para lidar com modelos qualitativos, enquanto que a matemática intervalar é mais apropriada para lidar com modelos quantitativos, ou seja, que envolvem tomadas de decisões de acordo com o valor apresentado.

2 Construção do espaço algébrico reticular Ω_N

Nesta seção, introduziremos uma estrutura algébrica intervalar denotada por Ω_N e satisfazendo a condição de um reticulado completo, conforme será mostrado.

Definição 2.1 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Defina-se Ω_N como sendo o conjunto dado por*

$$\Omega_N = \{[x, y] \in \mathbb{I} : x \leq y \leq n\}$$

onde \mathbb{I} é o conjunto formado por intervalos cujo extremos são números naturais. Um intervalo da forma $[a, a]$ é chamado de intervalo degenerado.

Um intervalo $X \in \Omega_N$ será denotado por $X = [\underline{x}, \bar{x}]$.

Observe que $\Omega_N = \{X \in \mathbb{I} : \mathcal{O} \leq X \leq N\}$ where $\mathcal{O} = [0, 0]$ e $N = [n, n]$

Definimos a seguinte relação de ordem:

Definição 2.2 *Relação de ordem do conjunto Ω_N*
Definimos a relação de ordem do conjunto Ω_N do seguinte modo: Dados $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ e $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$ dois intervalos pertencentes a Ω_N , então, $X \leq Y$ se $\underline{x} \leq \underline{y}$ e $\bar{x} \leq \bar{y}$. Esta relação de ordem é a ordem de **Kulisch-Miranker** [11].

A seguir, define-se as operações de supremo e ínfimo entre dois elementos de Ω_N

Definição 2.3 *Dado $X, Y \in \Omega_N$ tal que $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ e $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$, define-se as seguintes operações:*

$$X \vee Y = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})]$$

$$X \wedge Y = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})]$$

Proposição 2.1 Ω_N é um reticulado completo.

Demonstração: Claramente Ω_N é um reticulado completo munido da relação de ordem de Kulisch e Miranker e as operações de supremo e ínfimo definidas em 3.1. Seja $S \subseteq \Omega_N$, se $S = \emptyset$

então $\bigvee S \in \Omega_N$ e $\bigwedge S \in \Omega_N$. Caso $S \neq \emptyset$, seja $\mu_1(S) = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}, [x, y] \in S\}$ e $\mu_2(S) = \{v \in \mathbb{N} : \exists u \in \mathbb{N}, [u, v] \in S\}$. Como, $\mu_1(S)$ e $\mu_2(S)$ são limitados superiormente e inferiormente, então, existe o supremo e o ínfimo de $\mu_1(S)$ e de $\mu_2(S)$, denotado por $\bigvee \mu_1(S), \bigwedge \mu_1(S), \bigvee \mu_2(S)$ e $\bigwedge \mu_2(S)$ respectivamente. Desse modo,

$$\bigwedge S = [\bigwedge \mu_1(S), \bigwedge \mu_2(S)] \quad \text{e} \quad \bigvee S = [\bigvee \mu_1(S), \bigvee \mu_2(S)].$$

$$\text{e} \quad \bigwedge s = [\bigwedge (\mu_1(S)), \bigwedge \mu_2(S)] \quad \text{e} \quad \bigvee S = [\bigvee (\mu_1(S)), \bigvee \mu_2(S)]. \quad \blacktriangle$$

A figura 1 representa uma estrutura do reticulado Ω_N . Podemos observar que essa estrutura é uma cadeia finita munida da ordem parcial \leq . Note também que intervalos da forma $[x, y]$ com $x \neq y$ representam as incertezas.

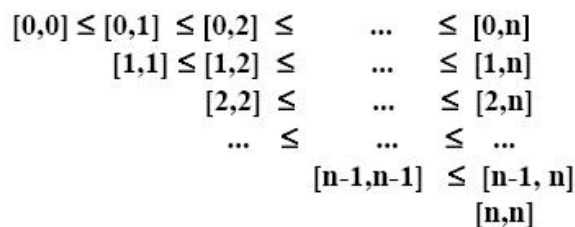


Figura 1: Estrutura do reticulado Ω_N .

Vamos mostrar que Ω_N é um reticulado completo com complemento forte.

Definição 2.4 *Dado $X = [\underline{x}, \bar{x}] \in \Omega_N$ define-se $\neg : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ por*

$$\neg X = [n, n] - [\underline{x}, \bar{x}] = [n - \bar{x}, n - \underline{x}] \quad (1)$$

Note que $\neg x = n - x$, então, temos que $\neg x = [\neg \bar{x}, \neg \underline{x}]$

Proposição 2.2 *A função $\neg : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$ é um complemento forte.*

Demonstração:

- $\neg[0, 0] = [n - 0, n - 0] = [n, n]$ e $\neg[n, n] = [n - n, n - n] = [0, 0]$

- De acordo com a ordem de Kulisch-Miranker. Seja $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ e $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$
 $X \geq Y \Leftrightarrow \underline{x} \geq \underline{y}$ e $\bar{x} \geq \bar{y}$
 $\Leftrightarrow N - X \leq N - Y \Leftrightarrow n - \underline{x} \leq n - \underline{y}$ and

$$\begin{aligned}
n - \bar{x} &\leq n - \bar{y} \\
\Leftrightarrow [n - \bar{x}, n - \underline{x}] &\leq [n - \bar{y}, n - \underline{y}] \\
\Leftrightarrow \neg X &\leq \neg Y
\end{aligned}$$

- $\neg(N - X) = N - (N - X) = N + (-N - X) = N + (-N) + X = 0 + X = X$, desde que N é degenerado.

Antes de introduzir as funções intervalares, vamos definir a **soma e subtração limitada** entre dois elementos do conjunto Ω_N . Este conceito foi baseado no caso pontual desenvolvido por Heijmans em [7] e se torna necessário, uma vez que as funções que modelam as imagens intervalares em escala de cinza, serão definidas no domínio $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mapeadas no conjunto finito Ω_N .

Seja $V = [\underline{v}, \bar{v}] \in \mathbb{I}\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{I}\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros intervalares e $\mathcal{O} = [0, 0]$ e $N = [n, n]$. A operação $T \rightarrow T +_N V$ sobre Ω_N é dada por:

$$\begin{aligned}
T +_N V &= \mathcal{O} \text{ se } T = \mathcal{O} \text{ ou } T > \mathcal{O} \text{ e } T + V \leq \mathcal{O} \\
T +_N V &= T + V \text{ se } T > \mathcal{O} \text{ e } \mathcal{O} \leq T + V \leq N \\
T +_N V &= N \text{ se } T > \mathcal{O} \text{ e } T + V > N \\
T +_N V &= [0, \bar{T} + \bar{V}] \text{ se } T > \mathcal{O} \text{ e } T + V \geq \mathcal{O} \text{ e } \\
&T + V \geq N
\end{aligned}$$

E a operação $T \rightarrow T -_N V$ sobre Ω_N é dada por:

$$\begin{aligned}
T -_N V &= [\underline{T} - \underline{V}, n] \text{ se } T \leq N \text{ e } N \subseteq T - V \text{ e } \\
&\mathcal{O} \leq T - V \\
T -_N V &= \mathcal{O} \text{ se } T < N \text{ e } T - V \leq \mathcal{O} \\
T -_N V &= T - V \text{ se } T < N \text{ e } \mathcal{O} \leq T - V \leq N \\
&\text{e } T + V > N \\
T -_N V &= N, \text{ se } T = N \text{ ou } T < N \text{ e } T - V > N
\end{aligned}$$

Proposição 2.3 *Seja $A, B \in \Omega_N$. Então*

$$A +_N B = [\underline{A} +_N \underline{B}, \bar{A} +_N \bar{B}] \quad (2)$$

e

$$A -_N B = [\underline{A} -_N \underline{B}, \bar{A} -_N \bar{B}] \quad (3)$$

3 As funções que modelam as imagens intervalares em escala de cinzas

Em [8], Lyra define uma imagem digital intervalar como sendo uma matriz A , de ordem $m \times n$ que representa uma imagem espacialmente discretizada, obtida através de um dispositivo de aquisição de imagens e digitalizada por um digitalizador intervalar que transforma cada pixel da imagem em um intervalo. Alguns são representados por um intervalo degenerado, por exemplo, [12,12], outros são representados por intervalos contendo

um menor e um maior valor em suas extremidades e que representam os pixels indefinidos, como por exemplo, [12,16]. Cada elemento $a_{i,j}$ em A é denominado pixel intervalar, porque é um intervalo que define a variação I da intensidade luminosa deste pixel intervalar. Aqui um pixel intervalar é denotado por $[\underline{x}, \bar{x}]$.

As funções $F : E \rightarrow \Omega_N$ modelam imagens descritas na seção 2, onde E é um conjunto de coordenadas satisfazendo as condições de um grupo abeliano e Ω_N é o prévio reticulado. Nesta seção definiremos essas imagens e estudaremos algumas de suas propriedades algébricas. Apresentaremos então as imagens em escala de cinzas, como funções mapeadas no reticulado Ω_N construído na seção anterior.

Definição 3.1 *Seja $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Uma imagem intervalar em escala de cinzas, cujas posição dos pixels correspondem a valores intervalares, é definida pelo mapeamento $F : E \rightarrow \Omega_N$. O conjunto de todas as funções intervalares das imagens em escala de cinzas será denotado por Ω_N^E .*

Evidentemente, desde que Ω_N é um reticulado completo, então Ω_N^E também é um reticulado completo com ordem parcial e operações de supremo e ínfimo que serão descritas nas definições a seguir.

Definição 3.2 *Dadas as funções $F, G \in \Omega_N^E$, a seguinte relação de ordem é definida sobre Ω_N^E : $F \leq G \Leftrightarrow F(x) \leq G(x), \forall x \in E$, i.e., $\langle \Omega_N^E, \leq \rangle$ torna-se uma ordem parcial.*

Observe que, conforme foi visto na seção anterior, $\langle \Omega_N, \leq \rangle$ é uma ordem parcial (veja a estrutura representada na figura 1), por herança, $\langle \Omega_N^E, \leq \rangle$ também é uma ordem parcial.

Definição 3.3 (Supremo e ínfimo) *Seja I um conjunto infinito de índices. Dada uma família não vazia de funções intervalares pertencentes ao conjunto Ω_N^E , e tal que $F_I = \{F_i\}_{i \in I}$. Seja $\pi_1([a, b]) = a$, tal que $\Pi_1(X) = \{\pi_1(x_i) : x_i \in X\}$ e seja $\pi_2([a, b]) = b$, tal que $\Pi_2(X) = \{\pi_2(x_i) : x_i \in X\}$, onde $X \subseteq \Omega_N$, define-se as seguintes operações:*

$$\bigvee \{F_i\}_{i \in I}(x) = [\bigvee \Pi_1 F_i(x), \bigvee \Pi_2 F_i(x)] \quad (4)$$

$$\bigwedge \{F_i\}_{i \in I}(x) = [\bigwedge \Pi_1 F_i(x), \bigwedge \Pi_2 F_i(x)] \quad (5)$$

Proposição 3.1 Dada uma família qualquer $\{F_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega_L^E$, então, $\bigvee\{F_i\}_{i \in I}(x)$ e $\bigwedge\{F_i\}_{i \in I}(x)$ são as operações de supremo e ínfimo respectivamente.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que $\forall x \in E, \bigvee\{F_i\}(x)$ é um majorante de $\{F_i\}(x)$. Como para cada $x, \pi_1 F_i(x) \leq \sup \pi_1 F_i(x)$ e $\pi_2 F_i(x) \leq \sup \pi_2 F_i(x)$, então $\bigvee\{F_i\}$ é um majorante de $\{F_i\}$.

Agora vamos mostrar que $\bigvee\{F_i\}$ é o menor dos majorantes de $\{F_i\}(x)$.

Seja G outro majorante de $\{F_i\}$. Por definição $\forall x \in E, F_i(x) \leq G(x)$.

Logo, $\forall x, \pi_1 F_i(x) \leq \pi_1 G(x)$ e $\pi_2 F_i(x) \leq \pi_2 G(x)$.

Então, $\sup \pi_1 F_i(x) \leq \pi_1 G(x)$ e $\sup \pi_2 F_i(x) \leq \pi_2 G(x)$.

Portanto $\bigvee\{F_i\}_{i \in I}(x) \leq G(x), \forall x \in E$.

desse modo, $\bigvee\{F_i\}(x)$ é uma operação de supremo.

A prova da operação de ínfimo é análoga. \blacktriangle

Lema 3.1 As funções $\top, \perp : E \rightarrow \Omega_N^E$, tal que $\top(x) = [n, n]$ e $\perp(x) = [0, 0] \forall x \in E$ são respectivamente, o maior e o menor elemento de Ω_N^E .

Corolário 3.1 Se $I = \emptyset$ então, a função constante \perp e \top são respectivamente o supremo e o ínfimo de F_I

Proposição 3.2 $\langle \Omega_N^E, \leq, \top, \perp \rangle$ é um reticulado completo, com operações de supremo e ínfimo.

Definição 3.4 Seja $F \in \Omega_N^E$ então, a negação $\neg : \Omega_N^E \rightarrow \Omega_N^E$ é definida por

$$(\neg F)(x) = \neg F(x) \quad (6)$$

Desse modo, se $F \in \Omega_N^E$ e $F(x) = [\underline{x}, \bar{x}]$ então

$$\neg F(x) = [n - \bar{x}, n - \underline{x}] \quad (7)$$

Proposição 3.3 \neg é um complemento forte.

Demonstração: $\neg \neg F(x) = \neg([n - \bar{x}, n - \underline{x}]) = [n - n + \underline{x}, n - n + \bar{x}] = [\underline{x}, \bar{x}]$

Portanto, $\neg \neg F(x) = F(x)$ \blacktriangle

Corolário 3.2 A ordem parcial (Ω_N^E, \leq) é um reticulado completo com a operação \neg sendo um complemento forte.

4 Morfologia matemática intervalar

Na morfologia clássica, os modelos para imagens em tons de cinza são representados matematicamente pelo mapeamento $F : E \rightarrow \mathcal{T}$ onde \mathcal{T} é um reticulado completo. \mathcal{T} é definido por um conjunto de valores de tons de cinza que pode ser dado por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$. \mathcal{T} também pode ser dado como sendo o intervalo $[0, 1]$ ou o conjunto finito $\{0, 1, \dots, N\}$. Observe que, a escolha para \mathcal{T} vai depender da aplicação, mas em geral, em prática computacionais, sempre são usados modelos finitos. Então, para o caso de imagens intervalares em tons de cinza, vamos considerar o caso finito. A escolha de \mathcal{T} como um conjunto finito intervalar para lidar com a teoria da morfologia matemática, se deve a simplicidade conforme pode ser constatado no modelo pontual apresentado por Heijmans em [1] pp 580-582, embora seja possível estender a teoria para o caso real. A abordagem da morfologia intervalar apresentada nesta seção teve como base a abordagem da morfologia clássica para aspectos teóricos em imagens em tons de cinza, desenvolvida por Heijmans no referido artigo.

4.1 Operações básicas

Definição 4.1 Seja $F, G \in \Omega_L^E$. As operações de supremo e de ínfimo entre F e G , são definidas respectivamente por:

$$(F \vee G)(x) = F(x) \vee G(x) \quad (8)$$

$$(F \wedge G)(x) = F(x) \wedge G(x) \quad (9)$$

Assim, se $F(x) = [a, b]$ e $G(x) = [c, d]$, então $(F \vee G)(x) = [\max(a, c), \max(b, d)]$ e $(F \wedge G)(x) = [\min(a, c), \min(b, d)]$

4.2 Dilatação e erosão para imagens intervalares em escala de cinzas

Antes de definirmos os operadores morfológicos vamos introduzir os conceitos de translação, soma e diferença de Minkowski.

Definição 4.2 (Translação) Dada uma função intervalar $F : E \rightarrow \Omega_N$, $u \in E$ e $v \in \Omega_N$. A **translação horizontal** de F por u , é dada pela função $F_u : E \rightarrow \Omega_N$ definida por $F_u(x) = F(x -$

u) e a **translação vertical** de F_x por $v \in \Omega_N$ é definida por $(F+v)(x) = F(x) +_N v$. Quando ambas as translações são aplicadas junto, nós obtemos a translação morfológica dada por

$$(F_u + v)(x) = F(x - u) +_N v \quad (10)$$

A figura 2 representa uma translação morfológica intervalar, quando consideramos uma função $F \in \Omega_N$.

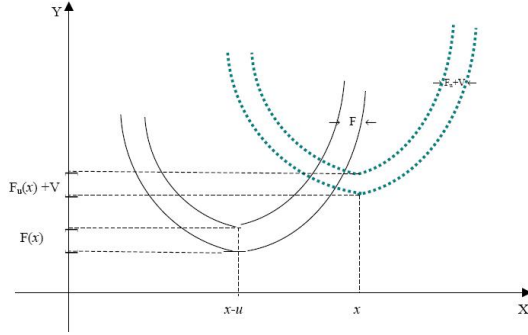


Figura 2: Gráfico de uma função Intervalar com uma translação morfológica.

Definição 4.3 (Reflexão) Dada uma imagem intervalar G e $x \in E$, A **reflexão** de G é definida por $\widehat{G}(x) = G(-x)$.

Proposição 4.1 Seja $F : E \rightarrow \Omega_L$ então, existe $\underline{F}, \overline{F} : E \rightarrow L$ tal que $F(u) = [\underline{F}(u), \overline{F}(u)]$. Em outras palavras, a função intervalar F pode ter uma forma intervalar, onde suas extremidades são funções pertencentes ao caso pontual.

Demonstração: Seja $\underline{F}(u) = \pi_1 F(u)$ e $\overline{F}(u) = \pi_2 F(u)$, então $F(u) = [\pi_1 F(u), \pi_2 F(u)] = [\underline{F}(u), \overline{F}(u)]$. ▲

Corolário 4.1 $F_u(x) = [\underline{F}_u(x), \overline{F}_u(x)]$.

Demonstração: De fato, temos que, $F_u(x) = F(x - u) = [\underline{F}(x - u), \overline{F}(x - u)] = [\underline{F}_u(x), \overline{F}_u(x)]$. ▲

Definição 4.4 (Operações de Minkowski) Dada duas imagens intervalares F e G . A soma e a diferença Minkowski são definidas respectivamente por:

$$F \ominus G = \bigwedge_{u \in E} \{F_u -_N \widehat{G}(u)\} \quad (11) \quad \text{e}$$

$$F \oplus G = \bigvee_{u \in E} \{F_u +_N G(u)\} \quad (12)$$

Note que, as operações de soma e diferença são feitas aqui de acordo com as definidas na seção 2, isso porque o domínio das funções intervalares é definido em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se não usarmos essa classe especial de operações, definidas como na seção 2, as operações de Minkowski não serão bem definidas e desse modo, não poderíamos definir os operadores morfológicos mapeados no conjunto Ω_N^E .

Definição 4.5 Dada duas imagens intervalares em escala de cinzas F and G , então

$$\varepsilon_G(F)(x) = \bigwedge_{u \in E} [F(x + u) -_N \widehat{G}(u)] \quad (13)$$

$$\Delta_G(F)(x) = \bigvee_{u \in E} [F(x - u) +_N G(u)] \quad (14)$$

Onde $\varepsilon_G(F) = (F \ominus G)(x)$ e $\Delta_G(F) = (F \oplus G)(x)$ são uma **erosão** e uma **dilatação**, respectivamente. Chamamos G uma **função estruturante**.

Uma forma equivalente para definir a dilatação e a erosão para o caso intervalar é dada como segue.

Definição 4.6 Seja $F, G \in \Omega_N^E$. Sejam $P_u(x) = F(x - u) +_N G(u)$ e $Q_u(x) = F(x + u) -_N \widehat{G}(u)$, $u \in E$ então, pela definição 3.3 e proposição 4.2 a dilatação e a erosão podem ser definidas por:

$$\Delta_G(F) = \left[\bigvee \Pi_1 \{P_u\}, \bigvee \Pi_2 \{P_u\} \right] \quad (15)$$

$$\varepsilon_G(F) = \left[\bigwedge \Pi_1 \{Q_u\}, \bigwedge \Pi_2 \{Q_u\} \right] \quad (16)$$

Proposição 4.2 Considerando o caso pontual, podemos escrever as equações 15 e 16 como a seguir:

$$(F \oplus G)(x) = [(F \oplus G)(x), (\overline{F} \oplus \overline{G})(x)] \quad (17)$$

$$(F \ominus G)(x) = [(F \ominus G)(x), (\overline{F} \ominus \overline{G})(x)] \quad (18)$$

Demonstração: Direto das equações 6.1 e 6.2 encontradas em [1], pp 21. É fácil provar que

$$\underline{(F \oplus G)}(x) = (\underline{F} \oplus \underline{G})(x) \quad (19)$$

$$\overline{(F \oplus G)}(x) = (\overline{F} \oplus \overline{G})(x) \quad (20)$$

Para verificar que as equações 13 e 14 definem de fato uma dilatação e uma erosão para o caso intervalar, i.e., onde as funções F e G pertencem ao conjunto Ω_N^E , vamos considerar o conceito de adjunção dado por Heijmans em [1].

De um modo geral, na morfologia clássica, adjunção é definido por: Dado \mathcal{L}, \mathcal{M} dois reticulados completos tais que $\epsilon : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$. O par (ϵ, δ) é chamado uma adjunção entre \mathcal{L} e \mathcal{M} se $\delta(Y) \leq X \Leftrightarrow Y \leq \epsilon(X)$. Esse conceito é conhecido também por conexão de Galois.

Considerando $F, G : E \rightarrow \mathcal{T}$, i.e., funções que representam as imagens em níveis de cinzas, então, a adjunção sobre \mathcal{T} é definida por: O par $(\epsilon_G(F), \Delta_G(F))$ é uma adjunção sobre $F : E \rightarrow \mathcal{T}$ se e somente se, para todo $x, y \in E$, existe uma adjunção $(\epsilon_{y,x}, \delta_{x,y})$ sobre \mathcal{T} tal que

$$\Delta(F)(y) = \bigvee \delta_{x,y}(F(x))$$

$$\epsilon(F)(x) = \bigwedge \epsilon_{y,x}(F(y))$$

Ainda de acordo com a morfologia clássica, podemos tomar apenas a translação horizontal, invariante por translação e considerar o chamado H-operator. Desse modo, para um H-operator, temos que $F_h(x) = F(x - h)$ e $\Psi(F_h) = [\Psi(F)]_h$. Esse mapeamento consiste em $F \rightarrow F_h$.

Note que, se Ψ é invariante sobre a translação vertical, então $\Psi(F + v) = \Psi(F) + v$. este operador Ψ é chamado T-operator. Neste caso o mapeamento consiste em $F \rightarrow F + v$.

De acordo com Heijmans, para verificar que o par (ϵ, Δ) , por se tratar do caso finito, é uma adjunção, primeiro deve ser considerado o caso para H-operator. Um resultado equivalente, descrito para o caso pontual, pode ser visto em [1].

Proposição 4.3 *O par (ϵ, Δ) é uma H-adjunção sobre Ω_N^E se e somente se, para todo $h \in E$ existe uma adjunção (ϵ_h, δ_h) sobre Ω_N tal que*

$$\Delta(F)(y) = \bigvee_{h \in E} \delta_h(F(y - h)) \quad (21)$$

$$\epsilon(F)(x) = \bigwedge_{h \in E} \epsilon_h(F(x + h)) \quad (22)$$

Na seção 2 foram definidas as operações intervalares de soma e diferença limitada que podem ser descritas por: Sendo $\Omega_N = \{[0, 0], \dots, [n, n]\}$ com $N \in \mathbb{N}$ e $[n, n] \in \mathbb{N}$. Para $T \in \Omega_N$ e $V \in \mathbb{Z}$ então, $T \rightarrow T +_N V$ e $T \rightarrow T -_N V$.

▲ **Lema 4.1** *O par $\epsilon(T) = T -_N V$ and $\delta(T) = T +_N V$ define uma adjunção sobre Ω_N para qualquer $V \in \mathbb{Z}$.*

Considerando a função estruturante G e tomando $\epsilon_h(T) = T -_N G(h)$ e $\delta_h(T) = T +_N G(h)$, podemos combinar a proposição 4.3 e o lema 4.1. Desse modo, para $T = F(y - h) \Rightarrow \delta_h(F(y - h)) = F(y - h) +_N G(h)$ e $T = F(x + h) \Rightarrow \epsilon_h(F(x + h)) = F(x + h) -_N G(h)$. Portanto $\epsilon_G(F)(x) = \bigwedge_{u \in E} [F(x + u) -_N G(u)]$ e $\Delta_G(F)(x) = \bigvee_{u \in E} [F(x - u) +_N G(u)]$

Uma importante propriedade algébrica dos operadores elementares da morfologia matemática é a relação da dualidade entre erosão e dilatação $\neg(F \oplus G) = [\neg F \ominus \widehat{G}]$. Podemos mostrar que esta propriedade é válida também para o caso intervalar.

Proposição 4.4 *Seja F e G duas imagens em intervalares, então*

$$\neg(F \oplus G) = \neg F \ominus \widehat{G} \quad (23)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \neg F \ominus G &= \bigwedge_{u \in E} \{\neg F_u(x) -_N \widehat{G}(x)\} \\ &= \bigwedge_{u \in E} \{([n, n] - F_u(x)) -_N \widehat{G}(x)\}, \text{ definição 3.4} \\ &= \bigwedge_{u \in E} \{([n, n] - [F_u(x), \overline{F}_u(x)]) -_N \widehat{G}(x)\}, \text{ corolário 4.1} \\ &= \bigwedge_{u \in E} \{[n - \overline{F}_u(x), n - F_u(x)] -_N [\widehat{G}(x), \widetilde{G}(x)]\}, \text{ proposição 4.1} \\ &= \bigwedge_{u \in E} \{[(n - \overline{F}_u(x)) -_N \widetilde{G}(x), (n - F_u(x)) -_N \widehat{G}(x)]\}, \text{ proposição 2.3} \\ &= \bigwedge_{u \in E} \{[\neg \overline{F}_u(x) -_N \widetilde{G}(x), \neg F_u(x) -_N \widehat{G}(x)]\}, \\ &= [\bigwedge_{u \in E} \{\neg \overline{F}_u(x) -_N \widetilde{G}(x)\}, \bigwedge_{u \in E} \{\neg F_u(x) -_N \widehat{G}(x)\}], \text{ proposição 4.1} \\ &= [(\neg \overline{F} \ominus \widetilde{G})(x), (\neg F \ominus \widehat{G})(x)], \text{ definição do caso pontual de } \ominus \text{ ([1], equação 6.3)} \\ &= [\neg(\overline{F} \oplus \widetilde{G})(x), \neg(F \oplus \widehat{G})(x)], \text{ proposição análoga à equação 23} \\ &= [N - (\overline{F} \oplus \widetilde{G})(x), n - (F \oplus \widehat{G})], \text{ equação 7} \\ &= [n, n] - (F \oplus G)(x) = \neg(F \oplus G)(x) \end{aligned}$$

▲ Tal como o caso tradicional, podemos definir outras operações morfológicas intervalares. As mais básicas são **abertura** e **fechamento** que são consideradas como filtros morfológicos. E outras operações tais como **gradiente morfológico**, **top-hat-transform**, etc. Em futuro trabalho (já em andamento) daremos continuidade a esse trabalho onde serão apresentados os referidos operadores morfológicos, entre outros, bem como uma aplicação prática do modelo apresentado aqui.

5 Considerações finais

Neste trabalho apresentamos uma estrutura algébrica intervalar, que teve como principal objetivo definir as funções que modelam imagens intervalares. A partir daí, utilizamos essa estrutura para definir os operadores morfológicos, dentro de uma ótica intervalar. Acreditamos que o modelo intervalar apresentado poderá ser aplicado em qualquer técnica ou método de análise de imagens através da morfologia matemática, desde que exista a necessidade de um maior controle de erros que freqüentemente produzem incertezas em algumas regiões da imagem. Então, esse trabalho teve como principal objetivo, propor uma nova ferramenta usando operações morfológicas intervalares para ser aplicado em alguma técnica morfológica conhecida para tratar incertezas que surgem durante o processamento da imagem.

Referências

- [1] H. Heijmans, Theoretical Aspects of Gray-Level Morphology, IEEE on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13 (1991) 568-582
- [2] A. Maragos and W. Schafer and A. Butt, Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal, Kluwer Academic Publishers, pages: 488, 1996
- [3] J. Goutsias and H. Heijmans, Fundamenta Morphologicae Mathematicae, Fundamenta Informaticae 41(2000)1-31,
- [4] G. Banon and J. Barrera, Bases da Morfologia Matemática para Análise de Imagens Binárias, Iris Sid INPE br, 1994
- [5] G. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 1. Academic Press, London, 1982
- [6] G. Klir, and T. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty and Information, New Jersey, Prentice Hall, 1998
- [7] H. Heijmans, Mathematical Morphology: Basics Principles, CWI, In Proceedings of Summer School on Morphological Image and Signal Processing, Zakopane, Poland, 1995
- [8] A. Lyra and R. C. Bedregal and A. D. Neto and B. C. bedregal, The interval Digital Images Processing, WSEAS transactions on circuits and system, (2004)
- [9] M. Ramoni, P. Sebastiani, Bayesian methods in Intelligent Data Analysis. Intelligent Data Analysis: Uma Introdução, Springer, New York, NY, (1999)
- [10] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353,
- [11] U. Kulisch, Miranker W., Computer Arithmetic in theory and practice, Academic Press, Inc. Orlando, FL, USA, 1981
- [12] I. Bloch, Spatial reasoning under imprecision using fuzzy set theory, formal logics and mathematical morphology, *Bull. International Journal of Approximate Reasoning.*, 41 (2006) 77-95
- [13] L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems, 1 (1978) 3-28
- [14] N. Friedman and M. Goldszmidt, Discretization of continuous attributes while learning Bayesian networks, In Saitta, L. (ed.), Proc. Of the 13th International Conference on Machine Learning, 157-165", 1996
- [15] H. Li and C. Xie and Z. Chen and Yi Lei, Segmentation of ultrasound image based on morphological operation and fuzzy clustering, Electronic Design, Test and Applications. Third IEEE International Workshop, 2006
- [16] A. Bouchet, and J. Pastore and V. Ballarin, Segmentation of Medical Images using Fuzzy Mathematical Morphology, JCS&T., 7 (2007).