Problemas de Riemann-Hilbert: Caracterização e estudo de polinômios ortogonais

Heron M. Félix*
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: almacinza@gmail.com,

Alagacone Sri Ranga
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: ranga@ibilce.unesp.br

RESUMO

A teoria de polinômios ortogonais tem vasta aplicação em todos os tipos de problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Tais polinômios caracterizam-se por satisfazerem a propriedade

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \delta_{nm},$$

onde $\phi(x)$ é uma medida positiva no intervalo (a,b) (que pode ser ilimitado) e $P_k(x)$ possui grau exatamente k.

Em 1992, Fokas, Its e Kitaev introduziram uma caracterização de polinômios ortogonais em termos de um problema de Riemann-Hilbert matricial (2x2). Uma versão simplificada do problema de Riemann-Hilbert pode ser dada da seguinte forma: seja γ uma curva orientada (sem pontos de auto-intersecção) no plano complexo $\mathbb{C}$. A curva possui um lado positivo à sua esquerda e um negativo à sua direita, quando caminhamos no sentido de sua orientação. Devemos, então, encontrar uma função f que satisfaça às seguintes condições:

(A) f é analítica em $\mathbb{C} - \gamma$;

(B) Supondo que os valores de fronteira de f para $s \in \gamma$, definidos por

$$f_+(s) = \lim_{z \to s^+} f(z) \quad \text{e} \quad f_-(z) \lim_{z \to s^-} f(z),$$

ambos existam, então f deve ser tal que, dada uma função v,

$$f_+(s) = f_-(s)v(s).$$

Se a curva γ é fechada e a função v satisfaz a condição de Hölder em γ, então uma solução para esse problema pode ser dada por

$$f(z) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{ln(v(s))}{s-v}}.$$

É objetivo, também, estender esta caracterização para certos polinômios similares aos ortogonais, com a finalidade de considerar, futuramente, as propriedades assintóticas desses polinômios.

Referências

[1] P. Deift, Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach (American Mathematical Society), 2000.

[2] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, Volume 1, (Wiley Classics Library), 1988.

[3] R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán, W. V. Assche, Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions, (NOVA) 2004.

*bolsista de Mestrado CAPES