Empacotamento Reticulado e Teoria de Códigos

Everton Luiz de Oliveira
Departamento de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: evertonelo@yahoo.com.br,

Edson Donizete de Carvalho
Departamento de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: edson@feis.unesp.br.

RESUMO

Neste trabalho abordaremos o problema de empacotamento esférico no espaço $\mathbb{R}^n$, que consiste em obter uma distribuição de esferas com mesmo raio em $\mathbb{R}^n$ de tal forma que a interseção entre duas esferas tenha, no máximo, um ponto de contato. Em particular é de interesse os empacotamentos cujos centros das esferas formam um conjunto discreto de pontos em $\mathbb{R}^n$, onde a distância entre os pontos adjacentes seja a mesma. Um conjunto que, além destas características, apresenta uma estrutura algébrica de $\mathbb{Z}$-módulo chamamos de empacotamento reticulado, que denotaremos por Λ.

Da Teoria dos Códigos, sabemos que ao tomarmos o espaço euclidiano n-dimensional, para n suficientemente grande e considerarmos os centros das esferas de um empacotamento reticulado denso como sinais (para valores altos da relação sinal-ruído, SNR), obtemos um código de bloco ótimo para um canal gaussiano branco ($AWGN$) limitado em faixa. Dessa forma é garantida uma pequena probabilidade de erro numa transmissão de dados abaixo de certa taxa $\mathcal{C}$ chamada capacidade do canal, como demonstrado por Shannon em 1948, o que estabeleceu um importante vínculo entre empacotamento esférico e Teoria de Códigos. Logo, torna-se conveniente a busca de um arranjo de esferas onde o espaço recoberto por estas seja o maior possível, ou seja, que esta distribuição tenha alta densidade em $\mathbb{R}^n$. É relevante nesses reticulados Λ, que além do aproveitamento de espaço, as esferas tenham um raio máximo. Em particular no caso $\mathbb{R}^2$, podemos obter reticulados através de ladrilhamentos por quadrados, triângulos ou hexágonos. No ladrilhamento obtido por quadrados, conseguimos identificar seus baricentros e vértices com elementos do reticulado dado pelo anel de inteiros $\mathbb{Z}[i]$, proveniente do corpo de números $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Já no ladrilhamento por hexágonos, identificamos o reticulado dado com o anel de inteiros $\mathbb{Z}[\omega]$, proveniente do corpo de números $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, onde ω é a raíz sexta da unidade.

Sabemos pela Teoria de Reticulados, que para se obter uma boa densidade de um reticulado Λ, considerando Λ como anel de inteiros de um corpo de números F, precisamos minimizar o quadrado do discriminante d_F. No caso $\mathbb{R}^2$, temos que $d_{(\mathbb{Q}(\sqrt{-1}))} = -4$ e $d_{(\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))} = -3$. Logo, o reticulado $\mathbb{Z}[\omega]$ é mais denso que $\mathbb{Z}[i]$.

Referências

[1] C.C. Lavor, M.M.S. Alves, R.M. Siqueira e S.I.R. Costa, em *Uma Introdução à Teoria dos Códigos* , Notas em Matemática aplicada, SBMAC, São Carlos, 2006

[2] N.J.A. Slone, J.H. Conway, em *Sphere Packing, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, New York, 1999.