Estudo da estabilidade do método de diferenças finitas aplicado à equação de onda com memória

Liliane Ribeiro da Silva*
Faculdade de Matemática,UFPA
E-mail: lilirisi@hotmail.com

Daniel da S. Martins† Valcir J.C. Farias Marcus P.C. Rocha Héliton R. Tavares‡
Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística-PPGME
66.075-900 , Campus Guamá, Bélem, PA
E-mail: danielfermat@hotmail.com, valcir@ufpa.br, mrocha@ufpa.br, heliton@ufpa.br.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é estudar a estabilidade da solução numérica para a equação de onda com memória, em particular para o seguinte problema:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \int_0^t f(t-r) u_{xx} dr = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0, \ \forall \ \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

A memória, o terceiro termo da equação (1), caracteriza a propriedade de viscoelasticidade do material e pode ser entendido como um meio que descreve a perda de suas propriedades elásticas, a qual a energia do sistema se estabiliza com o tempo.

A solução numérica da equação (1) é obtida pelo método de diferenças finitas utilizando diferenças centradas de segunda ordem, resultando em:

$$.u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\sum_{n=0}^{N-1}[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}]f_{j-n}\Delta t. \qquad (2)$$

onde $\lambda = \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}$ e f é uma função relaxamento, positiva e não crescente.

A estabilidade do método numérico usado na discretização da equação foi obtida a partir do critério de Von Neumann, onde chegamos a seguinte condição:

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{\alpha^2 - 1} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Resultados

Os resultados obtidos em nosso estudo mostram que o método aplicado é condicionalmente estável. A figura (1) mostra o resultado da simulação da equação de onda a partir da equação (2)

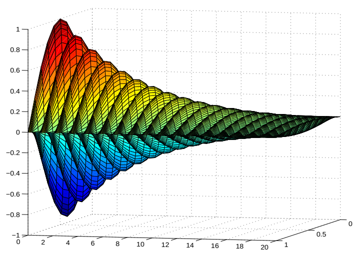

Figura 1: Solução Numérica da Equação de Onda com $t = 20$s, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.025$, $\alpha = 2$.

Referências

[1] M.C.C. Cunha, “Métodos Numéricos”, UNICAMP, São Paulo, 2000.

[2] R.S. Rêgo, “Análise Numérica da Equação da Onda com Memória via Método das Diferenças Finitas” Dissertação de Mestrando, PPGME-UFPA, 2007.

*bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq
†Aluno do PPGME
‡Professores do PPGME