

Grupo de Homologia, uma Fonte Natural de Códigos

J. D. Lima, Luana P. R. C. Lima,

Depto de Informática, MCC, UERN/UFERSA,
59633-010, Mossoró, RN

E-mail: joaodeus@uern.br, luana.lima@mcc.ufersa.edu.br

Resumo: *Os sistemas de transmissão de dados, nos quais os componentes codificação/modulação/canal são planejados de forma integrados [6], são menos complexos e funcionam de forma natural, no sentido de exigirem menos dispositivos para correções de possíveis distorções. Para este tipo de sistema, apresentamos justificativas que apontam o grupo de homologia como a fonte natural de estruturas fornecedoras de códigos corretores de erros, descrevemos um método simplificado do cálculo do grupo de homologia de uma superfície e fornecemos uma provável matriz geradora de uma estrutura de código corretor de erros [3].*

1 Introdução

Em [6], Lima e Palazzo definem um sistema integrado de transmissão de dados. Integrado no sentido de que os blocos canal/modulação/codificação são planejados de forma dependentes, ou seja, os blocos modulação e codificação são projetados a partir do modelo de um canal DMC (*Discret Memoreless Channel*). O propósito é fazer com que estes componentes atuem de forma compatíveis, eliminando dispositivos adicionais, geralmente usados para correções da não funcionabilidade dos sistemas causados pela escolha aleatória desses componentes.

Num sistema integrado, os projetos de modulação e codificação pertencem ao universo das superfícies, mas, apresentam aspectos matemáticos distintos: a modulação é um problema de mergulho de grafos, pertence à Teoria dos Grafos; e a codificação, ao ambiente da Topologia Algébrica. Será visto aqui apenas a questão da codificação. Mais exatamente, obteremos uma estrutura algébrica, o grupo de homologia da superfície onde encontra-se o projeto de modulação associado ao canal DMC, e uma matriz geradora de um código corretor de erros.

2 Por que Grupo de Homologia?

É bastante comum o uso de códigos corretores de erros para corrigir o ruído existente no canal. Por ser o canal a origem do problema, é a partir do seu modelo plano, ou seja, do grafo

G correspondente à seção da treliça, que o sistema integrado é projetado.

O objetivo é projetar um sistema de modulação que represente exatamente os sinais e transições do canal de maneira bem definidos. No plano, o modelo da modulação pode apresentar ambiguidades, desde que não seja possível o mergulho de G . Neste caso, existe um conjunto de superfícies diferentes do plano, onde G pode ser mergulhado [9], preservando sua estrutura, no sentido de que somente os seus vértices e transições estejam bem definidos.

Mergulhando G em uma superfície Ω na forma de um mergulho de 2-células, obtemos uma representação do canal, nos quais sinais e transições estão bem definidos; com isso, o projeto de modulação para o espaço de sinais corresponderá ao grafo dual G' de G , sobre Ω , cuja construção é simples, quando G é conhecido.

Ambas as estruturas G e G' , sobre Ω , são importantes para um sistema integrado. É o grafo G' que define a região de Voronoy, ou região de decisão de cada sinal, e é G , por conter exatamente as transições e sinais do canal, que define o código corretor de erros, que irão compor um sistema integrado de transmissão de sinais para o canal com seção de treliça G .

Mas qual é a estrutura algébrica sobre Ω que contém, de forma natural, a estrutura de G' ? Testamos inicialmente várias estruturas, os grupos diedral, de Lee, de Cayley e de homologia e chegamos a conclusão, que o primeiro grupo de homologia da superfície na qual se encontra mergulhado o grafo associado ao canal é a estrutura algébrica relacionada ao processo que atende todas as condições requeridas.

Mas por que o grupo de homologia? Bem, conhecendo somente o grupo de homologia de Ω , em princípio, não haveria nenhuma relação com o canal G , porém, esta relação existe se aplicarmos o método do complexo simplicial orientado de Betti [4] para o cálculo do grupo de homologia, do seguinte modo: como o método usa uma triangulação sobre Ω , a mesma pode ser obtida diretamente do modelo do mergulho de G , (basta tomar, sobre o modelo do mergulho de G , vértices nos centros das regiões e conectá-los a cada vértice da respectiva região). Esta triangulação contém necessariamente G e, conseqüentemente, o grupo de homologia de Ω , por ser obtido a partir de relações algébricas associadas aos lados da trian-

gulação, contém, uma sub-estrutura correspondente às transições de G . Este procedimento atende o nosso objetivo que é obter uma estrutura algébrica associada às transições de um canal de comunicação.

O método de Betti sobre a triangulação Δ , fornece uma apresentação de grupo P , isto é, um sistema de relações triviais sobre o qual é deduzido o grupo de homologia da superfície. O processo de dedução consiste em simplificar P num sistema de relações triviais irreduzíveis P' .

Como P e P' representam uma mesma estrutura algébrica, pois são sistemas equivalentes, as correspondentes matrizes associadas M e M' , podem ser consideradas geradoras de palavras de um código corretor de erros. Em princípio não se descarta o uso de nenhuma das duas estruturas como geradoras de palavras de um código. O que se sabe é que ambas são isomorfas ao grupo de homologia de Ω . Não discutiremos aqui se M ou M' é mais apropriada para o uso de código corretor de erro. O foco é o processo de cálculo do grupo de homologia, elemento importância no processo de associação canal/modulação/codificação.

Queremos enfatizar que, apenas o grupo de homologia da superfície, não é suficiente para se projetar um sistema integrado de comunicação digital. Neste caso, é necessário sim, construir a triangulação Δ sobre Ω contendo o modelo de canal, sobre o qual é projetado a modulação, como também é necessário obter as matrizes M e M' geradoras de códigos corretores de erros.

Por outro lado, M é mais fácil de ser obtida. Mas é M' que identifica a estrutura algébrica, e portanto é indispensável a sua identificação. Mas o grupo de homologia independente da triangulação e, como Δ possui um número razoável de 3-simplexos, e cada um corresponde a uma relação trivial da apresentação, a nossa meta é fornecer um grafo, sobre o qual, o cálculo do grupo de homologia é determinado com o mínimo de relações triviais.

3 O método de Betti

O cálculo do primeiro grupo de homologia de uma superfície Ω , indicado por $H_1(\Omega)$ [4], consiste das seguintes etapas:

1. Constrói-se um complexo simplicial orientado K sobre o polígono orientado de n -lados de Ω ;
2. Constrói-se uma árvore maximal \mathcal{T} sobre K ;
3. Determina-se o conjunto Z_1 dos 1-ciclos z^i 's associados aos 1-simplexos e^i 's $\notin \mathcal{T}$;
4. Encontra-se as relações de bordos de cada 2-simplexo de K , em função dos elementos de Z_1 : são relações dos tipos $z^1 = 0$,

$z^1 + z^2 = 0$ ou $z^1 + z^2 = z^3 = 0$, denotadas por E_1, E_2 ou E_3 , respectivamente. O conjunto dessas relações definem uma apresentação \mathcal{P} para $H_1(\Omega)$;

5. Em \mathcal{P} , faz-se as substituições de variáveis:

- (a) nas relações $z^{i_1} = \dots = z^{i_t}$, $i_1 < \dots < i_t$, substitui-se, em E_3 , cada elemento z^{i_2}, \dots, z^{i_t} pelo elemento de menor índice z^{i_1} , obtendo um sistema M_Ω só de relações do tipo E_3 ;
- (b) nas relações $z^{i_1} = \dots = z^{i_t} = 0$, considera-se z^{i_1}, \dots, z^{i_t} como elementos neutros e não são incluídos em M_Ω ;

6. Acha-se, o posto p , o número de variáveis v e a dimensão de M_Ω : $\dim M_\Omega = p - v$;

7. Encontra-se as relações do tipo: $\delta_1 \phi^1 = 0$, $\delta_2 \phi^2 = 0, \dots, \delta_k \phi^k = 0$;

8. A apresentação final do Z_1/B_1 será

$$\langle \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n; \delta_1 \phi^1 = 0, \dots, \delta_k \phi^k = 0 \rangle$$

onde $B_1 = \{\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n\}$ é o conjunto das variáveis livres de M_Ω ($n = \dim M_\Omega$);

9. Assim, o primeiro grupo de homologia da superfície Ω será dado pelo isomorfismo

$$H_1(\Omega) \cong \mathbb{Z}_{\delta_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\delta_k} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

onde $\text{posto}(Z_1/B_1) = n - k$.

3.1 Exemplo: a superfície de Klein

A garrafa de Klein N_2 é uma superfície não-orientada cuja forma normal é $\omega(N_2) = aba^{-1}b$ [8]. Logo, é gerada por um polígono de 4-lados. Seja v_0 e v_1 os vértices do 4-lados. Os demais vértices pertencem à triangulação K sobre N_2 . Os números de 0-cadeias, 1-cadeias e o número ciclotômico de K , mostrada na Figura 1 são,

$$\alpha_0 = 12, \alpha_1 = 36 \text{ e } \mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 = 25.$$

Seja \mathcal{T} o subgrafo tracejado sobre K da Figura 1. \mathcal{T} é uma árvore maximal sobre K .

Em particular, as 1-cadeias de K , que não estão sobre \mathcal{T} , são:

$$e^1, \dots, e^{17}, e^{19}, \dots, e^{23}, e^{27}, e^{29}, e^{31}, \dots, e^{36}.$$

Os caminhos conexos sobre K , que definem o 1-ciclo z^i associado ao laço l^i sobre $\mathcal{T} + e^i$, são:

$$\begin{aligned} z^1 &= e^1 + e^5 + e^6, & z^2 &= e^2 - e^6 - e^5, \\ z^3 &= e^3 - e^8 - e^7, & z^4 &= e^4 + e^7 + e^8, \\ &\vdots & &\vdots \\ z^{33} &= e^{33} + e^{30} - e^{28} - e^{18} - e^9, \\ z^{34} &= e^{34} + e^7 + e^8 + e^9 + e^{18} + e^{28} - e^{30}, \\ z^{35} &= e^{35} - e^{28} - e^{18} - e^9 - e^8 - e^7, \\ z^{36} &= e^{36} + e^5 + e^6 + e^7 + e^8 + e^9 + e^{18} + e^{28}. \end{aligned}$$

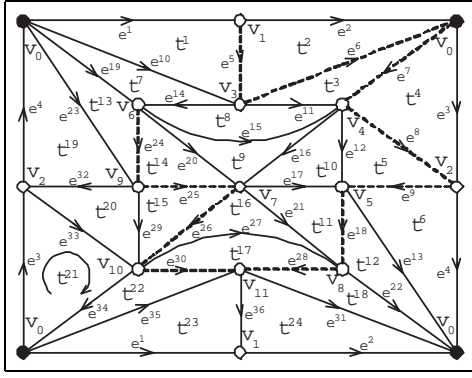


Figura 1: Complexo simplicial orientado sobre N_2

Usando a Proposição 1, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_2(t^1) &= e^1 + e^5 - e^{10} = z^1 - z^{10}, \partial_2(t^2) = e^2 - e^6 - e^5 = z^2, \partial_2(t^3) = e^6 + e^7 - e^{11} = -z^{11}, \\ &\vdots \\ \partial_2(t^{19}) &= e^{23} + e^{32} + e^4 = z^{23} + z^{32} + z^4, \partial_2(t^{20}) = e^{29} - e^{33} - e^{32} = z^{29} - z^{33} - z^{32}, \\ \partial_2(t^{21}) &= e^{33} + e^{34} + e^3 = z^{33} + z^{34} + z^3, \partial_2(t^{22}) = e^{30} - e^{35} - e^{34} = -z^{35} - z^{34}, \\ \partial_2(t^{23}) &= e^{35} + e^{36} - e^1 = z^{35} + z^{36} - z^1, \partial_2(t^{24}) = e^{31} - e^2 - e^{36} = z^{31} - z^2 - z^{36}. \end{aligned}$$

Logo, os geradores de $Z_1(N_2)$ e suas relações triviais são dados pela seguinte apresentação

$$\langle z^1, z^2, z^3, z^4, z^{10}, \dots, z^{16}, z^{17}, z^{19}, \dots, z^{23}, z^{27}, z^{29}, z^{31}, z^{32}, z^{33}, z^{34}, z^{35}, z^{36}, z^2 = z^3 = -z^{11} = -z^{12} = z^{20} = z^{27} = -z^{29} = z^1 - z^{10} = z^4 - z^{13} = z^{17} - z^{21} = z^{13} - z^{22} = z^{19} - z^{23} = z^{21} - z^{27} = z^{22} - z^{31} = -z^{35} - z^{34} = z^{12} - z^{17} - z^{16} = z^{10} + z^{14} - z^{19} = z^{11} - z^{15} - z^{14} = z^{15} + z^{16} - z^{20} = z^{23} + z^{32} + z^4 = z^{29} - z^{33} - z^{32} = z^{33} + z^{34} + z^3 = z^{35} + z^{36} - z^1 = z^{31} - z^2 - z^{36} = 0 \rangle.$$

As relações triviais formam um sistema homogêneo nas variáveis z^i 's equivalente a

$$\begin{aligned} z^2 = z^3 = z^{11} = z^{12} = z^{14} = z^{15} = z^{16} = z^{17} = \\ z^{20} = z^{21} = z^{27} = z^{29} = 0, z^1 = z^{10} = z^{19} = z^{23}, \\ z^{32} = -z^{33} = z^{34} = -z^{35}, z^4 = z^{13} = z^{22} = z^{31} \\ = z^{36}, z^4 + z^{23} + z^{32} = z^1 - z^{35} - z^{36} = 0. \end{aligned}$$

Substituindo as relações iniciais nas duas últimas igualdades, têm-se a apresentação Z_1/B_1

$$\langle z^1, z^4, z^{32}; z^1 + z^4 + z^{32} = z^1 - z^4 - z^{32} = 0 \rangle \simeq \langle z^4, z^{32}; 2(-z^4 - z^{32}) = 0 \rangle.$$

Logo, o primeiro grupo de homologia da garrafa de Klein, pelo Corolário 1, é isomorfo a soma direta de \mathbb{Z}_2 com \mathbb{Z} , isto é, $H_1(N_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

A propriedade seguinte torna o cálculo dos 1-ciclos z^i 's de Z_1 em $H_1(\Omega)$ bastante simples.

Proposição 1 *Seja \mathcal{T} uma árvore maximal sobre uma triangulação K de Ω . Se t é um 2-*

simplexo de K , tal que $\partial_2(t) = \pm e^1 \pm e^2 \pm e^3$, então $\partial_2(t) = \Sigma \pm z^i$ se $e^i \notin \mathcal{T}$, onde z^i é o único 1-ciclo associado ao sub-grafo $\mathcal{T} + e^i$.

Observação 1 *É importante destacarmos as seguintes particularidades de um complexo simplicial K sobre uma superfície Ω :*

1. Um subgrafo \mathcal{T} de um grafo G é uma árvore maximal se \mathcal{T} é um caminho conexo que passa por todos os vértices de G [4]. Em particular, um complexo simplicial K sobre uma superfície Ω é um grafo;
2. Na realização geométrica de Ω os vértices de K têm como propriedades:
 - (a) Cada vértice no interior de n -lados corresponde a um único vértice de K no modelo espacial de Ω ;
 - (b) Um vértice de K no modelo espacial de Ω correspondente a vértices do bordo do polígono de n -lados representa, pelo menos, dois vértices deste;
 - (c) Se V_i é o conjunto dos vértices do bordo do polígono de n -lados com o mesmo rótulo i , então a árvore maximal \mathcal{T} sobre K , deve sair apenas de um único desses vértice de V_i .

4 Diagrama Triangular Central

Nesta seção, definiremos um diagrama \mathfrak{T} sobre uma superfície Ω e identificaremos os invariantes: número de componentes da árvore maximal \mathfrak{X} sobre \mathfrak{T} ; o número de 2-simplexos de \mathfrak{T} ; a quantidade de rótulos distintos dos 1-simplexos de \mathfrak{T} ; e o número das 1-cadeias ou variáveis da apresentação \mathfrak{P}_Ω , todos elementos fundamentais na identificação de $H_1(\Omega)$,

O objetivo é reduzir um complexo simplicial orientado sobre uma superfície Ω , a um diagrama com o menor número possível de 3-simplexos, visando minimizar o número de operações em $H_1(\Omega)$. Tal diagrama é definido como segue.

Definição 1 *Chamamos de **diagrama triangular central (DTC)** \mathfrak{T} sobre uma superfície Ω , a decomposição de n -lados de Ω em regiões triangulares formado por $n+1$ vértices, um central e os n vértices do polígono, e $2n$ lados: os lados do polígono, e os que saem do vértice central, denominados de **raios** de \mathfrak{T} .*

O grupo de homologia de uma superfície Ω pode ser calculado sobre o DTC. Lembramos que o cálculo de $H_1(\Omega)$ resume-se em resolver uma apresentação de grupo \mathfrak{P} constituída por β relações triviais (ou equações homogêneas) que dependem do número de 2-simplexos existentes no complexo. Quanto maior for o β maior o número de relações triviais.

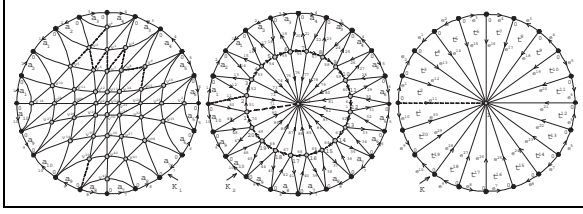


Figura 2: Complexos orientados sobre $5T$

A Figura 2, contém três complexos orientados sobre $5T$, sendo K o DTC de $5T$. A Tabela 1 contém os dados relativos aos números de vértices α_0 , de lados α_1 , número ciclotômico μ e o número de β de 2-simplexos de cada complexo.

	α_0	α_1	$\mu(K_1)$	β
K_1	42	150	110	100
K_2	22	90	70	60
\mathfrak{T}	2	30	1	30

Tabela 1: Comparação entre triangulações

Observamos que os números de elementos envolvidos no processo de cálculo de $H_1(5T)$ são expressivamente menores para o DTC K , o que implica numa redução acentuada na complexidade de cálculo de $H_1(5T)$. Observe ainda que K é o complexo mínimo, uma vez que foi construído sobre uma palavra mínima. Não há como reduzir o número de 2-simplexos de K , caso contrário, K teria um vértice bi-valente, condição com a qual K não pode ser um complexo. Apesar do DTC K de $5T$ na Figura 2

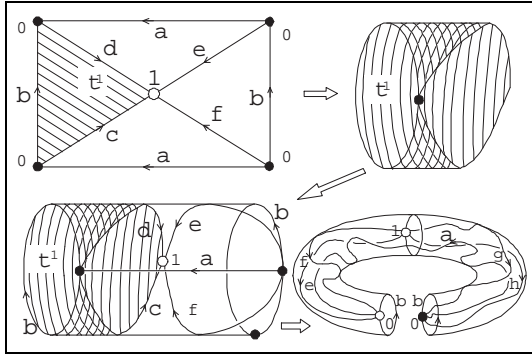


Figura 3: Realização geométrica do DTC sobre T

ser formado por triângulos, no entanto, K não é, de fato, uma triangulação sobre Ω ; não é sequer um complexo sobre $5T$. Veja que cada 2-simplexo t^i de K , possui um lado a^i do polígono 20-lados de $5T$, então o lado a^i do seu correspondente t^i , no modelo espacial K' de $5T$, é homotópico a um círculo; logo t^i também é homotópico a um círculo e, portanto, K não é um complexo. Além do mais, t^i contém um lado a^i sobre o 20-lados de $5T$, logo t^i é uma região triangular em K' com dois lados que se encontram, como mostra a Figura 3, condição

também que proíbe K de ser um complexo sobre $5T$.

O fato é: o DTC \mathfrak{T} é um pseudo grafo orientado sobre a superfície.

Observe que uma árvore \mathfrak{X} sobre \mathfrak{T} não pode passar por mais de dois raios consecutivos de \mathfrak{T} , caso contrário, \mathfrak{X} teria um laço, perdendo a sua condição de árvore.

4.1 Relações sobre o DTC

Seja \mathfrak{T} o DTC sobre uma superfície $\Omega \equiv n$ -lados, com árvore maximal \mathfrak{X} . Há duas possibilidades: ou \mathfrak{X} possui dois raios consecutivos, ou não. Uma vez que as palavras nas formas mínimas $\omega(mT_r)$ e $\omega(mP_r)$ estão associadas a polígonos de n -lados onde $n = 4m - 3r + 2$ e $n = 2m - 3r + 2$, respectivamente, então o número de relações triviais provenientes de \mathfrak{T} são [6]:

$$|E_1| = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathfrak{X} \text{ tem 2 raios consecutivos} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

$$|E_2| = \begin{cases} 2r, & \text{se } \mathfrak{X} \text{ tem 2 raios consecutivos} \\ 2r - 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

$$|E_3| = \begin{cases} 4m - 5r + 2, & \text{se } \Omega \equiv mT_r \\ 2m - 5r + 2, & \text{se } \Omega \equiv mP_r. \end{cases} \quad (3)$$

Para efeito de notação, os conjuntos de m -simplexos, $m = 1, 2$, de \mathfrak{T} sobre uma superfície Ω serão denotados por

$$L_1(\Omega) = \{e^1, \dots, e^h\} \text{ e } L_2(\Omega) = \{t^1, \dots, t^n\}.$$

Fixaremos a seguinte notação: \mathfrak{T} indica um DTC sobre uma superfície Ω com árvore maximal \mathfrak{X} que não passa por dois raios consecutivos; $|L_k(\Omega)|$, $k = 1, 2$, indica o número de k -simplexos de \mathfrak{T} ; R é o número de raios da árvore maximal de \mathfrak{T} ; e , $\text{var}(\mathfrak{P}_\Omega)$, o número de variáveis da apresentação \mathfrak{P}_Ω de $H_1(\Omega)$, após as substituições das relações de E_2 em E_3 da apresentação \mathcal{P} .

Cada família de superfícies tem um DTC particular, logo é possível deduzir [6] os números de: raios R da árvore \mathfrak{X} ; k -simplexos $|L_k(\Omega)|$, $k = 1, 2$; e de variáveis $\text{var}(\mathfrak{P}_\Omega)$, de \mathfrak{P}_Ω de H_1 , conforme a Tabela 2.

	R	$ L_1(\Omega) $	$ L_2(\Omega) $	$\text{var}(\mathfrak{P}_\Omega)$
S_r	r	$4r - 3$	$3r - 2$	$2r - 3$
mT	1	$6m - 1$	$4m$	$6m - 3$
mT_r	r	$6m + 4r - 3$	$4m + 3r - 2$	$6m + 2r - 3$
mP	1	$3m - 1$	$2m$	$3m - 3$
mP_r	r	$3m + 4r - 3$	$2m + 3r - 2$	$3m + 2r - 3$

Tabela 2: Relações no DTC

As superfícies S e S_1 são as únicas exceções para a condição do número de raios R da árvore maximal de S_r , (primeira linha e primeira coluna da Tabela 2). Nestes casos, a Figura 4 nos diz que: $L_2(S) = 2$, $L_2(S_1) = 3$, $L_1(S) = 1$ e $L_2(S_1) = 3$. Observe que $L_1(P) = 2 = 3 \cdot 1 - 1$ e $L_2(P) = 2 = 2 \cdot 1$, e portanto P satisfaz as condições da Tabela 2.

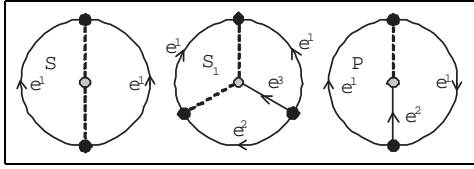


Figura 4: DTC sobre S , S_1 e P

Lembramos que se uma árvore maximal \mathfrak{X} sobre um DTC não possui dois raios consecutivos, então o número de relações triviais do tipo E_1 é zero, sobre mT ou mP , e produz apenas duas relações triviais do tipo E_2 (igualdade (2)).

5 H_1 de Superfícies Compactas

A essência do método de Beti, para o cálculo de $H_1(\Omega)$ [4], consiste em identificar dois invariantes: a dimensão n do espaço solução de \mathfrak{P}_Ω , e a identificação dos coeficientes de torção. O procedimento para manipular \mathfrak{P}_Ω é similar aos dos sistemas lineares. O método está fundamentado no seguinte teorema (veja [5] e [1]).

Teorema 1 *Seja F um grupo abeliano livre finitamente gerado e B um subgrupo de F . Então F/B tem uma apresentação da forma*

$$\langle x^1, \dots, x^n; \delta_1 x^1 = 0, \dots, \delta_k x^k = 0 \rangle.$$

onde $\delta_1, \dots, \delta_k$ são inteiros maiores que 1 e $\delta_1 | \delta_2, \delta_2 | \delta_3, \dots, \delta_{k-1} | \delta_k$, onde $k \leq n$. (Se não existem relações dizemos que $k = 0$). O inteiro $n - k$ e o δ_i são determinados pela classe de isomorfismo de F/B .

Corolário 1 *Nas condições do Teorema 1, temos*

$$F/B \cong \mathbb{Z}_{\delta_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\delta_k} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

onde existem $n - k$ \mathbb{Z} 's, isto é, o posto $(F/B) = n - k$.

Em particular, sobre um DTC \mathfrak{T} com árvore maximal \mathfrak{X} , a apresentação de $H_1(\Omega)$ é da forma:

$$\langle \phi^1, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^{n-2}, \phi^{n-1}, \phi^n; f_1(\phi^1, \dots, \phi^n) = \dots = f_s(\phi^1, \dots, \phi^n) = 0 \rangle,$$

onde $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ são variáveis livres de \mathfrak{P}_Ω e $f_i(\phi^1, \dots, \phi^n)$, $i = 1, \dots, s$, é uma combinação linear de $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$, isto é:

$$f_i(\phi^1, \dots, \phi^n) = a_1 \phi^1 + \dots + a_n \phi^n, \quad a_i \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

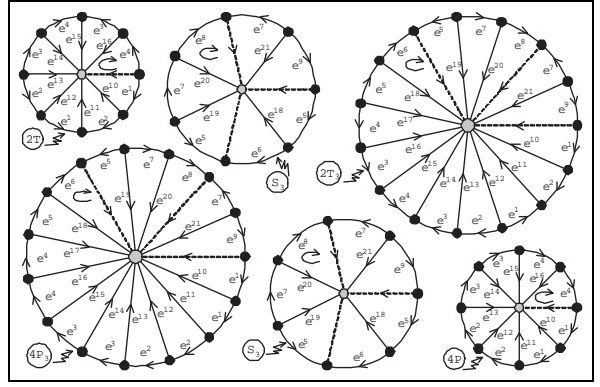


Figura 5: DTC sobre S_3 , $2T$, $4P$, $2T_3$ e $4P_3$

Assim, para os DTC das famílias de superfícies da Figura 5, temos:

$$\begin{aligned} E_2^{2T} &: \begin{cases} z^1 + z^{10} = 0 \\ z^4 + z^{16} = 0, \end{cases} & E_2^{4P} &: \begin{cases} z^1 + z^{10} = 0 \\ z^4 - z^{16} = 0, \end{cases} \\ E_3^{S_3} &: \begin{cases} z^1 + z^{20} - z^{19} = 0, \\ z^5 + z^{18} = 0 \\ z^6 - z^{18} = 0 \\ z^5 - z^{19} = 0 \\ z^8 - z^{20} = 0 \\ z^7 - z^{21} = 0 \\ z^9 - z^{21} = 0, \end{cases} & \mathfrak{P}_{S_3} &: \begin{cases} -z^5 + z^7 + z^8 = 0, \\ z^1 + z^{10} = 0 \\ z^6 - z^{18} = 0 \\ z^5 - z^{19} = 0 \\ z^8 - z^{20} = 0 \\ z^7 - z^{21} = 0 \\ z^9 - z^{21} = 0, \end{cases} \\ E_2^{S_3} &: \begin{cases} z^2 + z^{11} + z^1 = 0 \\ z^1 - z^{12} + z^{11} = 0 \\ z^2 - z^{13} + z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^4 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^3 - z^4 + z^{15} = 0, \end{cases} & E_2^{2T_3} = E_2^{4P_3} &: \begin{cases} z^1 + z^{10} = 0 \\ z^6 - z^{18} = 0 \\ z^5 - z^{19} = 0 \\ z^8 - z^{20} = 0 \\ z^7 - z^{21} = 0 \\ z^9 - z^{21} = 0, \end{cases} \\ \mathfrak{P}_{4P} &: \begin{cases} z^2 + z^{11} + z^1 = 0 \\ z^1 - z^{12} + z^{11} = 0 \\ z^2 - z^{13} + z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^4 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^3 - z^4 + z^{15} = 0, \end{cases} & \mathfrak{P}_{2T} &: \begin{cases} z^1 + z^{10} = 0 \\ z^1 - z^{12} + z^{11} = 0 \\ z^2 - z^{13} + z^{12} = 0 \\ z^3 + z^{14} - z^{13} = 0 \\ z^4 + z^{15} - z^{14} = 0 \\ z^3 + z^4 + z^{15} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Basta desenvolver cada apresentação \mathfrak{P}_Ω para se obter o grupo de homologia correspondente.

Note que cada diagrama da Figura 5 pode ser expandido, introduzindo-se componentes, sem alterar a forma original ou o tipo de árvore maximal, como mostra a Figura 6. São obviamente DTCs sobre mT , mP , S_r , mT_r e mP_s do tipo da Figura 5; logo, as matrizes na forma escalonada, relativas às apresentações de $H_1(\Omega)$, são como nas Matrizes 1 a 5 apresentadas ao abaixo. Uma análise nas Matrizes, mostra que a dimensão $d_{\mathfrak{P}_\Omega}$ do espaço solução de \mathfrak{P}_Ω é

$$\begin{aligned} d_{mT} &= 2m, & d_{\mathfrak{P}_{mP}} &= m - 1, & d_{\mathfrak{P}_{S_r}} &= r - 1, \\ d_{\mathfrak{P}_{mT_r}} &= 2m + r - 1, & d_{\mathfrak{P}_{mP_r}} &= m + r - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

No conjunto solução do sistema \mathfrak{P}_Ω , vemos que todos os coeficientes em \mathfrak{P}_{mT_r} são unitários, todos têm coeficientes 2 em \mathfrak{P}_{mP} e, em \mathfrak{P}_{mP_r} , a maioria é 2 e os demais iguais a 1. O coeficiente 1 em \mathfrak{P}_{mT_r} indica que H_1 é isomorfo a \mathbb{Z}^n e, o 2 em \mathfrak{P}_{mP_r} , indica que H_1 tem uma componente isomorfa ao grupo \mathbb{Z}_2 . Por exemplos, a solução $z = x + y$ em \mathfrak{P}_{mT_r} significa que $H_1(mT_r)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e a solução $z = 2(x + y)$ em \mathfrak{P}_{mP} , implica que $H_1(mP)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

As superfícies não-orientadas são caracterizadas pelo coeficiente de torção 2. A ausência do coeficiente de torção, em \mathfrak{P}_Ω , caracteriza as

M_2 correspondem às partes mP e S_r de mP_r , nesta ordem. Logo, os sistemas associados a M_1 e M_2 possuem apenas uma variável em comum, correspondente ao raio $e^{6m+2r-1}$ associado ao 1-ciclo $z^{6m+2r-1}$ da triangulação sobre mT_r (primeiro diagrama da Figura 6) ou, no caso de mP_r , a variável $z^{3m+2r-1}$ associada ao raio $e^{3m+2r-1}$ (diagrama à direita da Figura 6). Como nenhuma linha de M_2 é combinação linear de linhas de M_1 e vice versa, pois essas matrizes têm apenas uma variável em comum, então posto $M_\Omega = \text{posto } M_1 + \text{posto } M_2$, o que mostra (i). De modo análogo, prova-se (ii) e (iii). ■

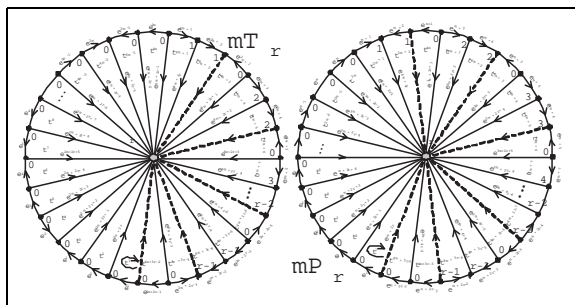


Figura 6: DTCs sobre mT_r e mP_r

A Proposição 2 é equivalente às igualdades em (7). De fato, pela Figura 6, o sistema E_{mT_r} apresenta três variáveis diferentes dos sistemas E_{mT} e E_{S_r} : z^{2m+2} , $z^{6m+2r-2}$ e $z^{6m+2r-1}$. Em E_{mP_r} , as variáveis diferentes de E_{mP} e E_{S_r} são z^{m+2} , $z^{3m+2r-2}$ e $z^{6m+2r-1}$. Das Matrizes 1 a 5, resulta que

$$d_{E_{mT_r}} = \text{var } E_{mT} + \text{var } E_{S_r} - \text{posto } mT - \text{posto } S_r - 2 = 2m + r - 1.$$

e, de modo análogo, deduzimos que

$$d_{E_{mP_r}} = \text{var } \mathfrak{P}_\Omega - \text{posto } \mathfrak{P}_\Omega = m + r - 1.$$

Resultados estes equivalentes às igualdades em (7); logo a Proposição 2 também determinam o primeiro grupo de homologia de uma superfície com bordo. A Tabela 3 contém o grupo de homologia das superfícies geradas por polígonos com até 9 lados.

6 Conclusão

O objetivo deste trabalho é parte do projeto de sistema integrado de transmissão de dados [6], e consiste em fornecer uma estrutura geradora de códigos corretores de erros, o grupo de homologia da superfície Ω sobre a qual o projeto de modulação é construído através de um mergulho de 2-células do grafo associado a um canal DMC, estrutura que contém o alfabeto (vértices) e as transições do canal (lados). Neste processo, a triangulação é obtida a partir do mergulho do canal em Ω , como mostra

n	Ω	$H_1(\Omega)$	n	Ω	$H_1(\Omega)$
1	S_1	$\{0\}$	6	P_2	\mathbb{Z}^2
2	S	$\{0\}$	7	S_3	\mathbb{Z}^2
2	P	\mathbb{Z}_2	7	$3P_1$	\mathbb{Z}^3
3	P_1	\mathbb{Z}	8	$2T$	\mathbb{Z}^4
4	T	\mathbb{Z}^2	8	T_2	\mathbb{Z}^3
4	S_2	\mathbb{Z}	8	$4P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3$
4	$2P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$	8	$2P_2$	\mathbb{Z}^3
5	T_1	\mathbb{Z}^2	9	$2T_1$	\mathbb{Z}^4
5	$2P_1$	\mathbb{Z}^2	9	P_3	\mathbb{Z}^3
6	$3P$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2$	9	$4P_1$	\mathbb{Z}^4

Tabela 3: Grupo de homologia

o exemplo da superfície de Klein, Figura 1, e as estruturas geradoras de códigos correspondem as Matrizes 1 a 5. Os diagramas triangulares centrais, nas Figuras 5 e 6, não são triangulações, mas determinam o grupo de homologia de uma superfície de forma simplificada, quando aplicado o método de Bety.

Referências

- [1] S.S. Cairns, "Introductory Topology", Ronald Press Co., New York, 1961.
- [2] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser, "Generators and Relations for Discrete Groups, 3rd ed., Springer-Verlag, New Heidelberg, Berlin, 1972.
- [3] G.D. Forney Jr., Geometrically uniform Ccodes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 37 Sept. (1991) 1241-1260.
- [4] P.J. Giblin, "Graphs, Surfaces and Homology", Chapman and Hall Ltd, London, 1977.
- [5] B. Hartley e T.O. Hawkes, "Rings, Modules and Linear Algebra", Chapman and Hall, 1970.
- [6] J.D. Lima e R. Palazzo Jr., "Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos de Canais Discretos sem Memória", Tese de doutorado, FEEC-UNICAMP, 2002.
- [7] H.A. Loeliger, Signal sets matched to groups, *IEEE Trans, Inform. Theory*, 37 n.6 Nov. (1991) 1675-1682.
- [8] W.S. Massey, "Algebraic Topology: an Introduction", Springer Verlag, New York, 1977.
- [9] R.D. Ringeisen, Determining all compact orientable 2-manifolds upon which $K_{m,n}$ has 2-cell embeddings. *Journal Combinatorial Theory*, 12 (1972) 101-104.