

A Função Delta de Dirac Aplicada na Representação de Grandezas Físicas Infinitamente Concentradas

Roberto Toscano Couto

Universidade Federal Fluminense – Dep. Matemática Aplicada
24020-120, Campus do Valonguinho, Centro, Niterói, RJ
E-mail: toscano@im.uff.br

1) Introdução

Neste trabalho desenvolvemos um método sistemático de expressar matematicamente, por meio da função delta de Dirac, uma grandeza física infinitamente concentrada no seu domínio. Para expor o método, consideramos o cálculo das fontes do campo eletromagnético em situações concentradas:

i) a densidade *volumétrica* de carga elétrica (ρ_e) em sistemas formados por cargas elétricas que se distribuem com *volume nulo*, ou seja, sistemas de partículas, fios e folhas eletricamente carregadas.

ii) o vetor densidade de corrente elétrica (\vec{j}_e) em sistemas formados por condutores de corrente elétrica cuja seção reta tem área nula, ou seja, sistemas de fios e folhas condutoras.

Na Seção 2, revemos aplicações clássicas da função delta no cálculo de ρ_e e \vec{j}_e em sistemas punctiformes. Na Seção 3, estabelecemos conceitos necessários no desenvolvimento do método de cálculo descrito nas seções seguintes. Nas Seções 4 e 5 (as principais), deduzimos fórmulas para ρ_e e \vec{j}_e em sistemas elétricos formados por fios e folhas.

2) Concentrações punctiformes

Num sistema contendo uma carga elétrica punctiforme q_0 , cujo vetor posição é $\vec{r} = \vec{r}_0$, a densidade volumétrica de carga é dada por

$$\rho_e(\vec{r}) = q_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (1)$$

que é a expressão que satisfaz as seguintes condições necessárias: $\rho_e(\vec{r}) = 0$ se $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ e $\int \rho_e(\vec{r}) dV = q_0$. Para expressar (1) num sistema de coordenadas curvilíneas (ξ, η, ζ) genérico, fazemos uso da fórmula (v. [5])

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) = |J|^{-1} \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0), \quad (2)$$

onde J é o jacobiano

$$J \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}. \quad (3)$$

Consideremos agora um sistema constituído de um dipolo elétrico punctiforme. Um dipolo é um arranjo de duas cargas elétricas punctiformes de mesma magnitude e sinais contrários. O *momento de dipolo elétrico* associado é, por definição, $\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$, onde q é a magnitude de cada carga elétrica, e \vec{r}_+ e \vec{r}_- são os vetores posição das cargas q e $-q$, respectivamente. Um dipolo elétrico *punctiforme* \vec{p} (note que, como de costume, designamos por “dipolo elétrico” tanto o arranjo de duas cargas elétricas de sinais contrários quanto o momento de dipolo elétrico associado) é caracterizado pelo limite $qh \rightarrow |\vec{p}|$ quando $h = |\vec{r}_+ - \vec{r}_-| \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$.

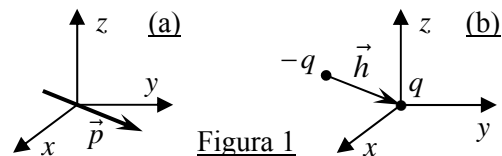


Figura 1

Vamos mostrar que, num sistema contendo apenas um dipolo elétrico punctiforme \vec{p} na origem (Figura 1a), a densidade *volumétrica* de carga elétrica é dada pela conhecida expressão (v. [2])

$$\rho_e(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r}). \quad (4)$$

Obtemos esse resultado calculando o limite da densidade *volumétrica* de carga elétrica de quando $h = |\vec{h}| \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$ num sistema como o da Figura 1b, formado pelas cargas elétricas punctiformes q e $-q$ localizadas em $\vec{r} = \vec{0}$ e $\vec{r} = -\vec{h}$, respectivamente. De fato, se $\vec{e}_h \equiv \vec{h}/h$, temos, usando (1), que

$$\begin{aligned}\rho_e(\vec{r}) &= \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} [q \delta(\vec{r}) - q \delta(\vec{r} + \vec{h})] \\ &= - \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \left[qh \frac{\delta(\vec{r} + h\vec{e}_h) - \delta(\vec{r})}{h} \right] \\ &= -p \frac{\partial \delta}{\partial \vec{e}_h}(\vec{r}) = -p \nabla \delta(\vec{r}) \cdot \vec{e}_h = -\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r}),\end{aligned}$$

pois, quando $q \rightarrow \infty$ e $h \rightarrow 0$, $qh \rightarrow p$ e $[\delta(\vec{r} + h\vec{e}_h) - \delta(\vec{r})]/h \rightarrow \partial \delta(\vec{r})/\partial \vec{e}_h$ (derivada na direção do versor \vec{e}_h).

3) Conceitos preliminares

Nos exemplos acima, as grandezas são concentradas em pontos isolados do domínio. Para descrever grandezas concentradas em curvas ou superfícies, é necessário desenvolver um método mais elaborado. Nesse sentido, o seguinte lema é de fundamental importância:

LEMA δ (uma variável):

$$\begin{aligned}f(x)dx &= \begin{cases} 0 & (x \neq x_0) \\ c & (x = x_0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow f(x) &= c \delta(x - x_0).\end{aligned}\quad (5)$$

Tal lema enuncia a equivalência de duas formas de expressar uma função concentrada. Para entendê-lo, seja $f(x) = \lambda_e(x)$: a densidade linear de carga elétrica ao longo do eixo x . Logo, $\lambda_e(x)dx$ é a carga elétrica contida no dx em torno de x . Assim, se

$$\lambda_e(x)dx = \begin{cases} 0 & (x \neq x_0) \\ q_0 & (x = x_0) \end{cases},$$

então no dx em torno de x_0 há carga elétrica, punctiforme, pois dx é infinitesimal, e igual a q_0 . Ora, sabemos que, nesse caso, $\lambda_e(x)$ é dado por $\lambda_e(x) = q_0 \delta(x - x_0)$. A recíproca é óbvia. Com mais variáveis, temos:

LEMA δ (generalizado):

$$\begin{aligned}f(x, y, z, w)dx dy &= \begin{cases} 0 & (x \neq x_0 \text{ ou } y \neq y_0) \\ c(z, w) & (x = x_0 \text{ e } y = y_0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow f(x, y, z, w) &= c(z, w) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0).\end{aligned}\quad (6)$$

Note que c não deve ser função das variáveis cujos diferenciais, no membro esquerdo, são multiplicados pela função f .

Adiante deduziremos fórmulas para o cálculo de ρ_e em sistemas não-punctiformes por um método que tem por base o lema δ . Assim, convém tratar novamente o sistema formado por uma única carga punctiforme q_0 , mas agora usando esse lema e um sistema de coordenadas curvilíneas (ξ, η, ζ) , sendo (ξ_0, η_0, ζ_0) as coordenadas de q_0 .

A carga elétrica contida num elemento de volume dV é dada por $dq = \rho_e dV$, ou, em termos das coordenadas curvilíneas consideradas, por $dq = \rho_e(\xi, \eta, \zeta) |J| d\xi d\eta d\zeta$, uma vez que $dV = |J| d\xi d\eta d\zeta$. Pois bem, no sistema considerado, dq só não é zero no dV que contém q_0 ; logo,

$$\begin{aligned}dq &= \rho_e(\xi, \eta, \zeta) |J| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \begin{cases} q_0 & \text{se } (\xi, \eta, \zeta) = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \\ 0 & \text{se } (\xi, \eta, \zeta) \neq (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \end{cases}\end{aligned}$$

donde, pelo lema δ ,

$$\rho_e(\xi, \eta, \zeta) |J| = q_0 \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0).$$

Essa equação é (1) com $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ dado por (2).

No método que desenvolvemos nas seções seguintes, um sistema *ortogonal* de coordenadas (ξ, η, ζ) é adotado. Num tal sistema, sabemos que, se h_ξ , h_η e h_ζ são os fatores de escala associados, então o elemento de comprimento de arco da curva coordenada em que só ξ varia, o elemento de área da superfície coordenada em que ξ e η variam, o elemento de volume e o jacobiano são dados por (v. [1])

$$ds = h_\xi d\xi, \quad dS = h_\xi h_\eta d\xi d\eta,$$

$$dV = |J| d\xi d\eta d\zeta, \quad |J| = h_\xi h_\eta h_\zeta.$$

Convém ainda lembrar a expressão dos fatores de escala nos principais sistemas de coordenadas ortogonais (v. [1]):

$$h_x = h_y = h_z = 1 \quad (\text{coord. cartesianas})$$

$$h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1 \quad (\text{coord. cilíndricas})$$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta \quad (\text{coord. esféricas})$$

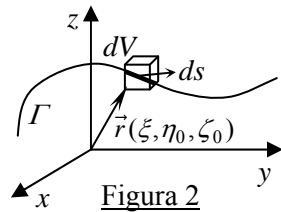
Por fim, fazemos uma definição muito útil no que segue: associada a qualquer coordenada ξ , $\bar{\xi}_{a,b}(\xi)$ é a função que só não se anula no intervalo $a \leq \xi \leq b$, onde é unitária.

4) Cálculo da densidade volumétrica de carga elétrica

a) Carga elétrica em fios

Consideremos um fio eletricamente carregado cuja forma é a de alguma curva coordenada Γ de algum sistema *ortogonal* de coordenadas (ξ, η, ζ) . Admitamos, sem perda de generalidade, que Γ seja a curva de ξ , isto é, ao longo do fio, apenas a coordenada ξ varia, permanecendo constantes as outras duas: $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$. Note que $\vec{r}(\xi, \eta_0, \zeta_0)$ é uma parametrização de Γ . Nosso problema consiste em calcular a densidade volumétrica de carga elétrica $\rho_e(\vec{r})$ no sistema contendo apenas aquele fio, cuja densidade linear de carga elétrica $\lambda_e(\xi) = \lambda_e[\vec{r}(\xi, \eta_0, \zeta_0)]$ é conhecida. Obviamente, $\rho_e(\vec{r}) = 0$ se $\vec{r} \notin \Gamma$: ρ_e é uma grandeza concentrada no fio.

Para resolver esse problema, observamos que a carga elétrica contida no elemento de volume dV localizado no ponto $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)$ do sistema é dada por $dq = \rho_e(\xi, \eta, \zeta) dV$, onde $\rho_e(\xi, \eta, \zeta) \equiv \rho_e[\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)]$. Se $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta) \notin \Gamma$ (i.e., $\eta \neq \eta_0$ ou $\zeta \neq \zeta_0$), então $dq=0$ (não há carga elétrica num dV que não é interceptado pelo fio). Mas, se $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma$ (i.e., $\eta = \eta_0$



e $\zeta = \zeta_0$), então a carga elétrica em dV é a que se encontra no elemento de comprimento de arco $ds = h_\xi d\xi$ da porção do fio dentro de dV : $dq = \lambda_e[\vec{r}(\xi, \eta_0, \zeta_0)] ds = \lambda_e(\xi) h_\xi d\xi$ (Figura 2). Assim,

$$dq = \rho_e(\xi, \eta, \zeta) \underbrace{h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta}_{dV}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{fora de } \Gamma \text{ (} \eta \neq \eta_0 \text{ ou } \zeta \neq \zeta_0 \text{)} \\ \lambda_e(\xi) h_\xi d\xi & \text{sobre } \Gamma \text{ (} \eta = \eta_0 \text{ e } \zeta = \zeta_0 \text{)} \end{cases}$$

ou, cancelando $h_\xi d\xi$ em ambos membros,

$$[\rho_e(\xi, \eta, \zeta) h_\eta h_\zeta] d\eta d\zeta$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \eta \neq \eta_0 \text{ ou } \zeta \neq \zeta_0 \\ \lambda_e(\xi) & \text{se } \eta = \eta_0 \text{ e } \zeta = \zeta_0 \end{cases}$$

Usando o lema δ , podemos escrever essa equação na forma

$$\rho_e(\xi, \eta, \zeta) h_\eta h_\zeta = \lambda_e(\xi) \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0) .$$

Em resumo, a densidade volumétrica de carga elétrica em função das coordenadas ortogonais escolhidas, $\rho_e(\xi, \eta, \zeta)$, no sistema formado por um fio de densidade linear de carga elétrica $\lambda_e(\xi)$ ao longo de uma curva de ξ completa, dada por $\eta = \eta_0$ e $\zeta = \zeta_0$, é expressa por

$$\rho_e(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_e(\xi) \frac{\delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0)}{h_\eta h_\zeta} . \quad (7)$$

Exemplifiquemos o uso dessa fórmula.

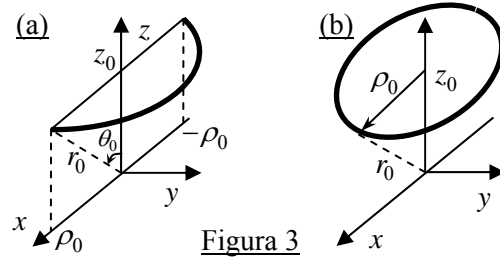


Figura 3

Se o fio for como a semicircunferência da Figura 3a, ao longo de parte de uma curva de φ , temos, em coordenadas cilíndricas, que

$$\rho_e(\rho, \varphi, z) = \lambda_e(\varphi) \frac{\delta(\rho - \rho_0) \delta(z - z_0)}{\rho} \bar{\varphi}_{0, \pi}(\varphi)$$

(o denominador é o resultado de $h_\rho h_z = \rho \cdot 1$) e, em coordenadas esféricas, que

$$\rho_e(r, \theta, \varphi) = \lambda_e(\varphi) \frac{\delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)}{r} \bar{\varphi}_{0, \pi}(\varphi)$$

(o denominador é o resultado de $h_r h_\theta = 1 \cdot r$).

Nessas fórmulas, a função $\bar{\varphi}_{0, \pi}(\varphi)$ é necessária porque o arco só é encontrado onde $\varphi \in [0, \pi]$. Ela garante que a integral de ρ_e em todo o espaço, V_∞ , forneça a carga elétrica total Q do fio:

$$\int_{V_\infty} \rho_e dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho_e r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \lambda_e(\varphi) \underbrace{r_0 \sin\theta_0}_{ds} d\varphi = \int_\Gamma \lambda_e ds = Q .$$

Obviamente, $\lambda_e = Q/(\pi\rho_0)$ se a carga elétrica Q distribuir-se uniformemente no fio.

Ressalve-se que, nas fórmulas acima, se a função $\bar{\varphi}_{0,\pi}(\varphi)$ tivesse sido omitida, elas descreveriam ρ_e no sistema formado pelo fio circular da Figura 3b.

b) Carga elétrica em folhas

Podemos deduzir ρ_e em sistemas formados por folhas eletricamente carregadas de modo análogo ao apresentado acima, para fios carregados, bastando que se adaptem a terminologia e as grandezas físicas ao caso.

Consideremos uma folha eletricamente carregada cuja forma é a de uma superfície coordenada Σ de um sistema *ortogonal* de coordenadas (ξ, η, ζ) . Admitamos, sem perda de generalidade, que Σ seja a superfície de ξ e η , isto é, sobre a folha, apenas as coordenadas ξ e η variam, permanecendo constante a terceira coordenada: $\zeta = \zeta_0$. Assim, $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta_0)$ é uma parametrização de Σ . Desejamos calcular a densidade volumétrica de carga elétrica $\rho_e(\vec{r})$ no sistema contendo apenas aquela folha, cuja densidade superficial de carga elétrica $\sigma_e(\xi, \eta) = \sigma_e[\vec{r}(\xi, \eta, \zeta_0)]$ é conhecida. Nesse caso, ρ_e é uma grandeza concentrada na folha: $\rho_e(\vec{r}) = 0$ se $\vec{r} \notin \Sigma$.

Seja dV um elemento de volume localizado na extremidade do vetor posição $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)$ e dq a carga elétrica contida em dV . Se

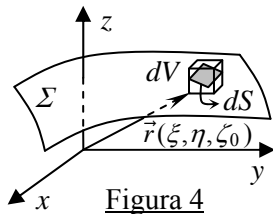


Figura 4

$\vec{r}(\xi, \eta, \zeta) \notin \Sigma$ (i.e., $\zeta \neq \zeta_0$), então $dq = 0$ (não há carga elétrica num dV que não é interceptado pela folha). Mas, se $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma$ (i.e., $\zeta = \zeta_0$), então a carga elétrica em dV é, como mostra a Figura 4, aquela no elemento de área $dS = h_\xi h_\eta d\xi d\eta$ da porção da folha dentro do elemento dV : $dq = \sigma[\vec{r}(\xi, \eta, \zeta_0)] dS = \sigma(\xi, \eta) h_\xi h_\eta d\xi d\eta$. Assim,

$$dq = \rho_e(\xi, \eta, \zeta) \underbrace{h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta}_{dV}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{fora de } \Sigma \quad (\zeta \neq \zeta_0) \\ \sigma(\xi, \eta) h_\xi h_\eta d\xi d\eta & \text{sobre } \Sigma \quad (\zeta = \zeta_0) \end{cases}$$

ou, cancelando $h_\xi h_\eta d\xi d\eta$ em ambos membros,

$$[\rho_e(\xi, \eta, \zeta) h_\zeta] d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{se } \zeta \neq \zeta_0 \\ \sigma_e(\xi, \eta) & \text{se } \zeta = \zeta_0 \end{cases}$$

Usando o lema δ , podemos escrever essa equação na forma

$$\rho_e(\xi, \eta, \zeta) h_\zeta = \sigma_e(\xi, \eta) \delta(\zeta - \zeta_0) .$$

Em resumo, a densidade volumétrica de carga elétrica em função das coordenadas ortogonais escolhidas, $\rho_e(\xi, \eta, \zeta)$, no sistema formado por uma folha de densidade superficial de carga elétrica $\sigma_e(\xi, \eta)$ e coincidente com uma superfície de ξ e η completa, dada por $\zeta = \zeta_0$, é expressa pela fórmula

$$\rho_e(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_e(\xi, \eta) \frac{\delta(\zeta - \zeta_0)}{h_\zeta} . \quad (8)$$

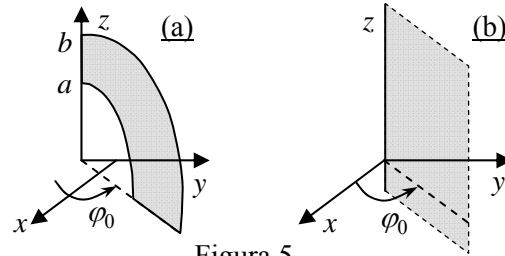


Figura 5

Para exemplificar essa fórmula, suponhamos que a folha seja como na Figura 5a, de bordas circulares e posicionada de modo que $\varphi = \varphi_0$ nela. Em coordenadas esféricas, temos que

$$\rho_e(r, \theta, \varphi) = \sigma_e(r, \theta) \frac{\delta(\varphi - \varphi_0)}{r \sin \theta} \bar{r}_{a,b}(r) \bar{\theta}_{0,\pi/2}(\theta)$$

(cujo denominador é o fator $h_\varphi = r \sin \theta$).

Se integrarmos essa equação em todo o espaço, obtemos, como é de se esperar, a carga elétrica total da folha. Fazemos isso no caso em que $\sigma_e = 4Q/[\pi(b^2 - a^2)]$ (Q distribuída uniformemente na folha):

$$\int_{V_\infty} \rho_e dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho_e r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{4Q}{\pi(b^2 - a^2)} \int_0^{\pi/2} \int_a^b r dr d\theta = Q .$$

Sem as funções $\bar{r}_{a,b}(r)$ e $\bar{\theta}_{0,\pi/2}(\theta)$, a fórmula acima expressaria ρ_e no sistema formado pela folha plana semi-infinita ilustrada na Figura 5b, com a mesma densidade σ_e .

5) Cálculo do vetor densidade de corrente elétrica

O vetor densidade de corrente elétrica $\vec{j}_e(\vec{r}, t)$ é definido de modo que $\vec{j}_e \cdot d\vec{S}$ forneça, no instante t , a corrente elétrica que atravessa o elemento de área orientado $d\vec{S} = \vec{n} dS$ localizado na extremidade de \vec{r} no sentido de \vec{n} se $\vec{j}_e \cdot \vec{n} > 0$ ou no sentido oposto se $\vec{j}_e \cdot \vec{n} < 0$. Note que, em termos mais simples, \vec{j}_e tem magnitude igual à corrente elétrica por unidade de área perpendicular à sua direção; trata-se, portanto, de uma densidade *superficial*. Um sistema em que podemos expressá-lo facilmente é o da Figura 6: uma barra cilíndrica conduzindo a corrente elétrica I distribuída uniformemente na seção reta de área A . Nesse caso, $\vec{j}_e = (I/A)\vec{e}$, onde \vec{e} é o versor na direção da corrente elétrica.

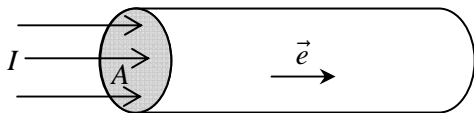


Figura 6

Existe uma relação entre \vec{j}_e e ρ_e , que é a seguinte:

$$\vec{j}_e = \rho_e \vec{v}, \quad (9)$$

onde \vec{v} é a velocidade com que a carga elétrica se desloca no ponto onde \vec{j}_e e ρ_e são avaliados. Para estabelecer essa relação, considere, num certo ponto onde haja o movimento de cargas elétricas, um elemento de área dS perpendicular a \vec{v} . Seja dq a carga elétrica que atravessa esse dS durante o tempo dt . Consoante a definição de \vec{j}_e , temos que $|dq| = |\vec{j}_e| dS dt$. A Figura 7 mostra que dq ocupa o volume $dV = dS |\vec{v}| dt$. Logo, como $\rho_e = dq/dV$, temos que

$$|\rho_e| = \frac{|dq|}{dV} = \frac{|\vec{j}_e| dS dt}{dS |\vec{v}| dt} \Rightarrow |\vec{j}_e| = |\rho_e \vec{v}|,$$

donde se obtém (9), pois a direção de \vec{j}_e é a da velocidade das cargas *positivas*.

Por meio dessa equação, podemos facilmente calcular, por exemplo, o vetor \vec{j}_e no

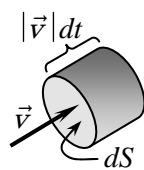


Figura 7

sistema da Figura 8, em que a carga elétrica puntiforme q move-se com velocidade $\vec{v} = d\vec{R}/dt$, onde $\vec{R}(t)$ é o seu vetor posição. Basta substituir $\rho_e = q\delta[\vec{r} - \vec{R}(t)]$ em (9):

$$\vec{j}_e(\vec{r}, t) = q\vec{v}\delta[\vec{r} - \vec{R}(t)].$$

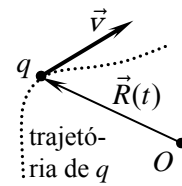


Figura 8

Bem, passemos para a parte principal desta seção: o cálculo do vetor densidade de corrente elétrica em sistemas formados por condutores cuja seção reta tem área nula, como fios e folhas de material condutor. Ilustramos tais sistemas na Figura 9, em que Γ e Σ são a curva e a superfície que descrevem a forma do fio e da folha, respectivamente.

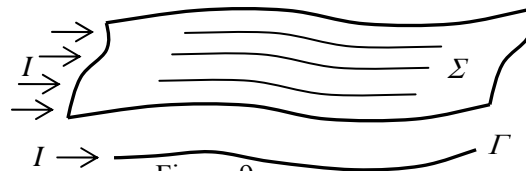


Figura 9

a) Fios condutores de eletricidade

Calculemos primeiramente $\vec{j}_e = \rho_e \vec{v} \vec{e}_\xi$ no sistema formado por um fio que conduz a corrente elétrica I conhecida. Usando coordenadas ortogonais (ξ, η, ζ) tais que, como antes, no fio, ξ varia, $\eta = \eta_0 = \text{const.}$ e $\zeta = \zeta_0 = \text{const.}$, vemos que $\vec{j}_e = \rho_e \vec{v} \vec{e}_\xi$ nos pontos do fio, isto é, os vetores \vec{v} e \vec{j}_e têm a direção do versor \vec{e}_ξ , tangente ao fio (Fi-

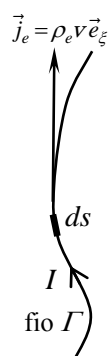


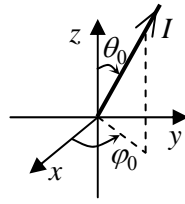
Figura 10

gura 10). Como o elemento de carga elétrica dq contido no elemento de comprimento de arco ds do fio é dado tanto por $dq = \lambda_e ds = \lambda_e v dt$ quanto por $dq = I dt$, concluímos, igualando, que $\lambda_e v = I$. Usando esse resultado na equação que se obtém com a substituição de (7) em (9), com $\vec{v} = v \vec{e}_\xi$, obtemos a fórmula do vetor densidade de corrente elétrica no sistema em que a corrente elétrica I é conduzida num fio ao longo da curva de ξ dada por $\eta = \eta_0$ e $\zeta = \zeta_0$:

$$\vec{j}_e(\xi, \eta, \zeta) = I(\xi) \frac{\delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0)}{h_\eta h_\zeta} \vec{e}_\xi. \quad (10)$$

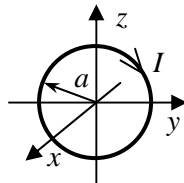
Note que admitimos a possibilidade de haver variação da intensidade da corrente elétrica ao longo do fio (i.e. de I depender de ξ).

Por exemplo, no sistema formado pelo fio condutor retilíneo mostrado na figura ao lado, obtemos



$$\vec{j}_e(r, \theta, \varphi) = I \frac{\delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)}{(r)(r \text{sen } \theta)} \vec{e}_r.$$

Já no caso do fio circular mostrado na figura à direita, temos que



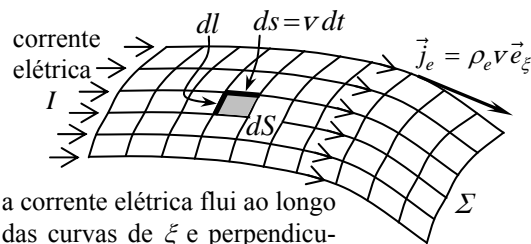
$$\vec{j}_e(r, \theta, \varphi) = \vec{j}_e^{(D)} + \vec{j}_e^{(E)},$$

onde

$$\vec{j}_e^{(D)} = I \frac{\delta(r - a) \delta(\varphi - \pi/2)}{r \text{sen } \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{j}_e^{(E)} = I \frac{\delta(r - a) \delta(\varphi - 3\pi/2)}{r \text{sen } \theta} (-\vec{e}_\theta)$$

correspondem à corrente elétrica nas metades direita e esquerda da espira, respectivamente.



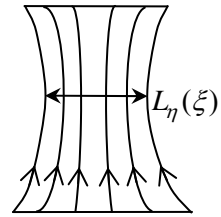
a corrente elétrica flui ao longo das curvas de ξ e perpendicularmente às curvas de η

Figura 11

b) Folhas condutoras de eletricidade

Consideremos agora a corrente elétrica I que flui sobre uma folha com a forma da superfície Σ que é descrita, nas coordenadas ortogonais (ξ, η, ζ) , por $v = v_0$. Essa superfície pode ser visualizada como um entrelaçado ortogonal de dois conjuntos de curvas, um formado por curvas ao longo das quais apenas ξ varia (*curvas de ξ*) e outro, por curvas nas quais apenas η varia (*curvas de η*). Admitimos que a condução das cargas positivas ocorra como mostra a Figura 11: ao longo das curvas de ξ , no sentido em que ξ cresce (assim, $\vec{j}_e = \rho_e v \vec{e}_\xi$) e, portanto, perpendicularmente às curvas de η . Também não restringimos a possibilidade de I depender de ξ , isto é, de uma corrente elétrica $I(\xi)$, que varia enquanto é conduzida.

No que segue, convém definir $I'(\xi, \eta)$ como sendo, no ponto $P(\xi, \eta, \zeta_0)$ de Σ , a densidade *linear* de corrente elétrica através da curva de η que passa por aquele ponto (ou a corrente elétrica por unidade de comprimento da curva de η). Por exemplo, se I for constante (independente de ξ) e os filamentos dessa corrente elétrica (i.e., as curvas de ξ) distribuírem-se uniformemente nas curvas de η , então $I' = I/L_\eta(\xi)$, onde $L_\eta(\xi)$ é a largura da curva de η , que pode variar com ξ , como na superfície ilustrada à direita.

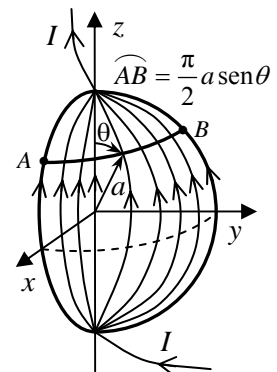


Como o elemento de carga elétrica dq contido no elemento de área $dS = dl ds = dl v dt$ da folha (Figura 11) é dado tanto por $dq = \sigma_e dS = \sigma_e dl v dt$ quanto por $dq = (I' dl) dt$, concluímos, igualando essas expressões de dq , que $\sigma_e v = I'$. Usando esse resultado na equação que se obtém com a substituição de (8) em (9), com $\vec{v} = v \vec{e}_\xi$, obtemos

$$\vec{j}_e(\xi, \eta, \zeta) = I'(\xi, \eta) \frac{\delta(\zeta - \zeta_0)}{h_\zeta} \vec{e}_\xi. \quad (11)$$

Em resumo, esta fórmula fornece o vetor densidade de corrente elétrica no sistema contendo uma folha condutora que tem a forma de uma superfície de ξ e η , dada por $\zeta = \zeta_0$, sobre a qual a corrente se dá ao longo das curvas de ξ e distribui-se com densidade linear I' nas de curvas de η , perpendiculares às primeiras.

Por exemplo, no sistema ilustrado ao lado, onde a corrente elétrica I flui uniformemente distribuída num quadrante de superfície esférica de raio a , temos que



$$\begin{cases} \vec{j}_e(r, \theta, \varphi) = -\vec{e}_\theta I' \delta(r - a) \bar{\varphi}_{0, \pi/2}(\varphi) \\ I' \equiv I / [(\pi/2) a \text{sen } \theta] \end{cases}$$

Para testar esse resultado, consideremos a superfície cônica S dada por $\theta = \theta_0$ (com $0 < \theta < \pi/2$) e orientada em cada ponto pela normal $\vec{n} = -\vec{e}_\theta$. Como toda a corrente elétrica

ca I atravessa S no sentido de \vec{n} , a integral de \vec{j}_e sobre ela deve ser igual a I . De fato, uma vez que $d\vec{S} = -\vec{e}_\theta r \sin\theta_0 dr d\theta$ é um elemento de área orientado de S , temos que

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{-2I \delta(r-b) \bar{\varphi}_{0,\pi/2}(\varphi) \vec{e}_\theta}{\pi a \sin\theta_0} \cdot (-\vec{e}_\theta) r \sin\theta_0 dr d\varphi \right] = \frac{I}{\pi/2} \int_0^\infty \delta(r-b) dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = I.$$

Como segundo exemplo, consideremos o sistema formado pela carga elétrica Q uniformemente distribuída numa superfície esférica de raio a , centrada na origem e que gira em torno do eixo z com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ constante. Nesse caso,

$$\vec{j}_e(r, \theta, \varphi) = I' \delta(r-a) \vec{e}_\varphi. \quad (12)$$

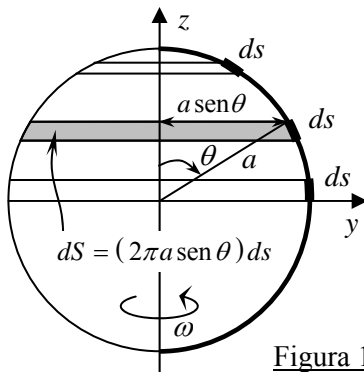


Figura 12

Somos tentados a usar a expressão $I' = (Q/T)/(\pi a)$ para a corrente elétrica por unidade de comprimento de uma curva de θ , o que é incorreto, pois I' varia com θ : a carga total Q atravessa uma curva de θ sem distribuir-se uniformemente sobre essa curva. A semicircunferência em negrito na Figura 12 realça uma dessas curvas de θ . Note que, quanto mais perto do equador está o elemento de comprimento de arco ds , mais carga elétrica passa por ele. A figura também mostra que a carga que atravessa ds durante o período de revolução T é $dq = \sigma(2\pi a \sin\theta) ds$, onde $\sigma = Q/(4\pi a^2)$. Portanto,

$$I' = \frac{(dq)/T}{ds} = \frac{\sigma(2\pi a \sin\theta)}{T} = \frac{Q \sin\theta}{2aT},$$

cujas substituição em (12) fornece a resposta.

Este problema, em particular, pode ser resolvido usando-se (9) diretamente, pois são

conhecidos $\rho_e = \sigma \delta(r-a)$ [$\sigma \equiv Q/(4\pi a^2)$] e $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin\theta \vec{e}_\varphi$ [$\omega \equiv 2\pi/T$]. Substituindo essas expressões naquela equação, obtemos o mesmo resultado (cf. [4]).

Comentários finais

Como foram desenvolvidas, as fórmulas de ρ_e e \vec{j}_e dadas por (7), (8), (10) e (11) têm sua validade condicionada à adoção de um sistema *ortogonal* de coordenadas. Essa restrição, entretanto, não impede que elas encontrem vasta aplicação em problemas de Física, haja vista, nessa ciência, predominar esse tipo de coordenadas.

Quanto às operações com a função delta como uma função — que não é! —, recordemos que Dirac não via no seu uso qualquer falta de rigor, pois afirmava ser sempre possível substituí-la por uma formulação equivalente, porém mais complicada (cf. [3]). Isso, de fato, confirmou-se com a justificativa matemática da função delta que a teoria das distribuições propiciou (v. [6] e [8]).

Referências

- [1] G. B. Arfken e H. J. Weber, "Física Matemática", Campus, 6ª ed., Rio de Janeiro, 2007 — Cap. 2.
- [2] G. Barton, "Elements of Green's Functions and Propagation", Oxford U. P., Clarendon, 1989 — Seç. 1.4.5.
- [3] P. A. M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", 4ª ed., Oxford U. P., Clarendon, 1958 — p. 59.
- [4] W. Greiner, "Classical Electrodynamics", Springer, Nova York, 1998 — p. 209.
- [5] J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Wiley, 2ª ed., Nova York, 1975 — p. 111.
- [6] M. J. Lighthill, "Fourier Analysis and Generalised Functions", Cambridge U. P., London, 1964.
- [7] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, "The Classical Theory of Fields", 4ª ed., Pergamon, Oxford, 1975 — §28.
- [8] L. Schwartz, "Théorie des distributions", Hermann, Paris, 1950.