

# *Q*-spread de grafos em classes especiais

**Carla Oliveira,**

Escola Nacional de Ciências Estatísticas, ENCE, IBGE,  
20231-050, Rio de Janeiro, RJ  
E-mail: carla.oliveira@ibge.gov.br

**Leonardo Lima,**

Departamento de Engenharia de Produção, CEFET-RJ  
20271-110, Maracanã, RJ  
E-mail: llima@cefet-rj.br

**Nair Abreu**

Departamento de Engenharia de Produção, COPPE, UFRJ  
21941-972, Rio de Janeiro, RJ  
E-mail: nair@pep.ufrj.br

## 1 Introdução

Para uma matriz complexa  $M$  de ordem  $n$ , o *spread* de  $M$  é definido como,  $s(M) = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|$ , onde o máximo é tomado sobre todos os pares de autovalores de  $M$ . Diversos resultados relacionados ao *spread* de uma matriz podem ser encontrados em [5] e [6].

Seja  $G$  um grafo simples, não orientado com  $n$  vértices  $v_i \in V$ ,  $m$  arestas  $(v_i, v_j) \in E$  e seqüência de graus  $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta$ , para  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ . A matriz quadrada simétrica de ordem  $n$ ,  $A(G) = [a_{ij}]$ , para a qual  $a_{ij} = 1$ , se  $(v_i, v_j) \in E$  e  $a_{ij} = 0$ , se  $(v_i, v_j) \notin E$ , é denominada matriz de adjacência de  $G$ . O polinômio característico associado a esta matriz é dado por  $p_G = \det(A(G) - \lambda I)$ , onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$  são os autovalores de  $G$ . O maior autovalor deste polinômio  $\lambda_1$  é o raio espectral de  $A(G)$ , denominado índice do grafo. Em 2001, Gregory *et al.*[4] determinaram alguns limites para o *spread* da matriz de adjacência de um grafo simples e, naquele mesmo artigo, eles conjecturaram sobre a existência de um grafo com *spread* máximo. Há outras matrizes associadas a grafos, cujos respectivos *spreads* não foram ainda investigados.

Seja  $D(G)$  a matriz diagonal dos graus dos vértices de  $G$  e  $L(G) = D(G) - A(G)$ , a matriz laplaciana de  $G$ . Como  $L(G)$  é uma ma-

triz positiva semidefinida e seu menor autovalor é zero, [8], o *spread* de  $L(G)$  é igual ao seu maior autovalor, conhecido como índice da matriz laplaciana de  $G$ . Portanto, o estudo do *spread* desta matriz é equivalente a de seu índice. Dado que este parâmetro já foi muito bem explorado, investigar o *spread* desta matriz parece desnecessário.

Recentemente, a matriz laplaciana sem sinal de um grafo  $G$ ,  $Q(G) = D(G) + A(G)$ , cujo espectro é dado por  $\text{spec}(Q(G)) = (q_1, \dots, q_{n-1}, q_n)$ , onde  $q_1 \geq \dots \geq q_{n-1} \geq q_n$  são os autovalores do polinômio característico associado a  $Q(G)$ , vem sendo muito estudada, [2], [3]. Embora seja, também, uma matriz positiva semidefinida, Cvetkovic' *et al.* [3] provaram que seu menor autovalor é nulo se, e somente, se  $G$  é um grafo bipartido. Assim, o interesse de investigar o *spread* de  $Q(G)$  ou, mais simplesmente, o *Q-spread* de  $G$ , recai nos casos dos grafos não-bipartidos. Além disso, se considerarmos a dificuldade do problema de encontrar grafos com *spread* máximo em relação à matriz de adjacência, [4], não seria aconselhável iniciar o estudo do *spread* da matriz laplaciana sem sinal  $Q(G)$  no universo de todos os grafos. É por esta razão que iniciamos aqui a investigação deste parâmetro em classes especiais de grafos, como o dos caminho-completo e dos unicíclicos.

## 2 $Q$ -spread de grafos caminho-completo

Iniciamos esta seção com alguns resultados básicos, devidos a Yan [7], sobre o espectro da matriz laplaciana sem sinal de alguns grafos. Deles, imediatamente decorrem, os  $Q$ -spreads dos grafos  $K_n$  e  $K_n - \{e\}$ . Em seguida, a classe dos grafos *caminho-completo* é apresentada e tanto o  $Q$ -espectro quanto o  $Q$ -spread para grafos especiais desta família são determinados.

**Proposição 1 ([7])** *O espectro de  $Q(K_n)$  é dado por*

$$\text{spec}(Q(K_n)) = (2n - 2, (n - 2)^{(n-1)}).$$

**Proposição 2 ([7])** *O espectro de  $Q(K_n - e)$  é dado por*

$$\text{spec}(Q(K_n - e)) = \left( \frac{3n - 6 \pm \sqrt{n^2 + 4n - 12}}{2}, (n - 2)^{(n-2)} \right).$$

Das Proposições 1 e 2, decorrem imediatamente o  $Q$ -spread dos grafos completo e do completo sem uma aresta.

**Proposição 3**  $s_Q(K_n) = n$ .

**Proposição 4**  $s_Q(K_n - e) = \sqrt{n^2 + 4n - 12}$ .

Os grafos caminho-completo  $PC_{n,p,t}$ , estudados em Belhaiza *et al.* [1], são apresentados e, na seqüência dessa seção, o espectro e o *spread* de alguns desses grafos são determinados.

**Definição 1** *Sejam  $n, m, t, p \in \mathbb{N}$ , onde  $1 \leq t \leq n - 2$  e  $1 \leq p \leq n - t - 1$ . Um grafo com  $n$  vertices and  $m$  arestas tal que*

$$\frac{(n-t)(n-t-1)}{2} + t \leq m \leq \frac{(n-t)(n-t-1)}{2} + n - 2.$$

*é denominado um grafo  $(n, p, t)$ -caminho-completo e, denotado por  $PC_{n,p,t}$  se, e somente, se*

1. a clique maximal de  $PC_{n,p,t}$  é  $K_{n-t}$ ;
2.  $PC_{n,p,t}$  tem um  $t$ -caminho  $P_{t+1} = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_t]$  tal que  $v_0 \in K_{n-t} \cap P_{t+1}$  e  $v_1$  é ligado a  $K_{n-t}$  por  $p$  edges;
3. não há mais nenhuma outra aresta no grafo.

Na Figura 1 vemos um exemplo de um grafo  $(n, p, t)$ -caminho-completo.

O Teorema 1 caracteriza o espectro dos grafos caminho-completo para os quais  $n \geq 4$  e  $p = t = 1$ ,  $PC_{n,1,1}$ .

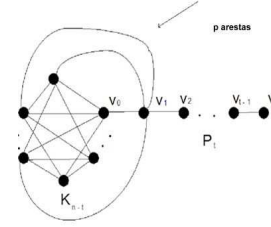


Figura 1:  $(n, p, t)$ -grafo caminho-completo

**Teorema 1** *Para  $n \geq 4$ , os espectro e o spread de  $PC_{n,1,1}$  são, respectivamente, dados por*

$$\text{Spec}(Q(PC_{n,1,1})) = \left( \frac{2n - 3 \pm \sqrt{4n^2 - 20n + 33}}{2}, (n-2), (n-3)^{n-3} \right)$$

e

$$s_Q(PC_{n,1,1}) = \sqrt{4n^2 - 20n + 33}.$$

**Prova 1** *Considere  $n \geq 4$  e  $G = PC_{n,1,1}$ . Então, a matriz laplaciana sem sinal é dada por*

$$Q(G) = \left( \begin{array}{c|ccc} & 1 & & 0 \\ \hline (n-3)I + J & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \frac{1}{0} \dots \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{n-1} & \frac{0}{1} \\ \hline \frac{1}{0} \dots \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \end{array} \right),$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $J$  uma matriz cujas entradas são todas iguais a 1. Seja a matriz  $Q(G) - (n-3)I$  como descrita abaixo:

$$Q(G) - (n-3)I = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \frac{1}{0} & \dots & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{0}{1} \\ \hline \frac{1}{0} & \dots & \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{4-n} \end{array} \right).$$

Aplicando-se operações elementares sobre as linhas de  $Q(G) - (n-3)I$ , obtém-se a matriz  $\tilde{Q}_1(G)$  como:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{0} & \dots & \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{4-n} \end{array} \right).$$

Veja que  $n-3$  é um autovalor de  $Q(G)$  com multiplicidade algébrica no mínimo igual a  $n-$

3. Considere, agora, a matriz  $Q(G) - (n-2)I$ :

$$Q(G) - (n-2)I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & | & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & & & | & 1 & | & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & | & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & & & 1 & | & 1 & | & \vdots \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 0 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & | & 1 & | & -n+3 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$(Q(G) - (n-2)I) \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \\ n-3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo,  $(n-2)$  é um autovalor de  $Q(G)$ .  
Desse modo,

$$\text{spec}(Q(PC_{n,1,1})) = (\alpha, \beta, n-2, (n-3)^{(n-3)}).$$

Além disso, sabemos que

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q(PC_{n,1,1})) &= q_1 + \cdots + q_n \Leftrightarrow \\ (n-2)(n-2) + (n-1) + 1 &= \alpha + \beta + (n-2) + (n-3)(n-3). \end{aligned}$$

Então,

$$\alpha + \beta = 2n - 3. \quad (1)$$

Também, sabemos que

$$\begin{aligned} \det(Q(G)) &= \det \begin{pmatrix} & & & 1 & | & 1 & | & 0 \\ & & & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\ & & & 1 & | & 1 & | & 0 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & n-2 & | & 1 & | & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2n} \det[(n-3)I_{n-1} + J_{n-1}]. \end{aligned}$$

Como os autovalores de  $J_{n-1}$  são 0 e  $n-1$  com multiplicidades algébricas  $n-2$  e 1, respectivamente, segue-se que os autovalores de  $(n-3)I_{n-1} + J_{n-1}$  são  $n-3$  e  $2n-4$ , com multiplicidades algébricas  $n-2$  e 1, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \det(Q(G)) &= (n-3)^{(n-2)}(2n-4) \\ q_1 q_2 \cdots q_n &= (n-3)^{(n-2)}(2n-4) \\ (n-3)^{(n-3)}(n-2)\alpha\beta &= (n-3)^{(n-2)}(2n-4) \\ \alpha\beta &= 2n-6 \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) e (2), resulta o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2n - 3 \\ \alpha\beta = 2n - 6. \end{cases}$$

Daí, segue

$$\alpha^2 + \alpha\beta = \alpha(\alpha + \beta) = \alpha(2n - 3)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - (2n-3)\alpha + (2n-6) = 0,$$

cujas raízes são

$$\frac{2n-3 \pm \sqrt{4n^2 - 20n + 33}}{2}.$$

Finalmente, é fácil mostrar que as raízes obtidas acima correspondem, respectivamente, ao menor e ao maior autovalor de  $Q(PC_{n,1,1})$ . Logo,

$$q_1 = \frac{2n-3 + \sqrt{4n^2 - 20n + 33}}{2}$$

e

$$q_n = \frac{2n-3 - \sqrt{4n^2 - 20n + 33}}{2}.$$

Portanto,

$$s_Q(PC_{n,1,1}) = \sqrt{4n^2 - 20n + 33}.$$

■

### 3 Q-espectro e Q-spread de alguns grafos unicíclicos

Nesta seção discutiremos o espectro e o spread dos grafos da pequena subfamília de grafos unicíclicos dada na Definição 2.

**Definição 2** Seja  $S_n^3$  um grafo obtido do ciclo  $C_3$  pela inserção de  $(n-3)$  vértices ligados por  $n-3$  arestas a um único vértice do ciclo.

É fácil ver que  $S_n^3$  é um grafo com um vértice de grau  $n-1$ , dois de grau 2 e os demais de grau 1. A Figura 2 mostra o grafo  $S_8^3$ .

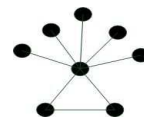


Figura 2: O grafo  $S_8^3$

O Teorema 2 dá os autovalores dos grafos da Definição 2 em função do determinante de uma matriz  $3 \times 3$ .

**Teorema 2** Para  $n \geq 4$ , o espectro de  $S_n^3$  é dado por

$$\text{Spec}Q(S_n^3) = (\alpha, \beta, 1^{(n-3)}, \gamma),$$

onde  $\alpha > \beta > \gamma$  são autovalores distintos de  $Q(S_n^3)$  e iguais aos autovalores da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & n-1 & n-3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o spread de  $Q(S_n^3)$  é dado pelo  $\max\{\alpha, 1\} - \min\{\gamma, 1\}$ .

**Prova 2** Para  $n \geq 4$ , seja  $S_n^3$ . Então,  $Q(S_n^3) =$

$$\left( \begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \mathbb{O}_{2,n-3} \\ \hline 1 & 1 & n-1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline & & 1 & & & \\ \mathbb{O}_{n-3,2} & & \vdots & & & \mathbb{I}_{n-3} \\ & & 1 & & & \end{array} \right).$$

A partir de  $Q(S_n^3)$ , considere a matriz  $Q(S_n^3) - I$  abaixo:

$$\left( \begin{array}{cc|cc|c} & & 1 & 1 & \\ \mathbb{J}_2 & & 1 & 1 & \mathbb{O}_{2,n-3} \\ \hline 1 & 1 & n-2 & 1 & \dots & 1 \\ \hline & & 1 & & & \\ \mathbb{O}_{n-3,2} & & \vdots & & & \mathbb{O}_{n-3,n-3} \\ & & 1 & & & \end{array} \right).$$

Considere  $L_i$  como a  $i$ -ésima linha da matriz anterior. Aplicando-se na matriz  $Q(S_n^3) - I$ , as seguintes operações elementares

$$L_2 \leftarrow L_1 - L_2,$$

$$L_{n-p+i} \leftarrow L_{n-p+i} - L_{n-p}, \quad 5 \leq i \leq n$$

obtém-se a matriz  $\tilde{Q}_1$  como a seguir:

$$\left( \begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{O}_{2,n-3} \\ \hline 1 & 1 & n-2 & 1 & \dots & 1 \\ \hline & & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ \mathbb{O}_{n-3,2} & & \vdots & & & \mathbb{O}_{n-3,n-3} \\ & & 0 & & & \end{array} \right).$$

Veja que  $\tilde{Q}_1$  tem  $n - 3$  linhas nulas e que, portanto, 1 é um autovalor de  $Q(S_n^3)$  com multiplicidade, no mínimo,  $n - 3$ . Desse modo,

$$\text{spec}(S_n^3) = (\alpha, \beta, 1^{(n-3)}, \gamma).$$

Considere

$$x^t = (a, a, b, c, \dots, c)$$

como um autovetor de  $Q(S_n^3)$ , correspondendo ao autovalor  $\lambda$ .

Assim,

$$Q(S_n^3)x = \lambda x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a+b \\ 3a+b \\ 2a+(n-1)b+(n-3)c \\ b+c \\ \vdots \\ b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \vdots \\ \lambda c \end{bmatrix}.$$

Do fato anterior, não é difícil obter  $M$  como a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & n-1 & n-3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desde que

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

então  $M$  tem os mesmos autovalores que  $Q(S_n^3)$ . Como  $M$  tem, no máximo 3 autovalores, resta-nos mostrar que dentre os autovalores, 1,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , de  $Q(S_n^3)$ , um deles não é autovalor de  $M$ . Suponhamos então que 1 seja um autovalor de  $M$ . Assim,  $\det(M - I) = n - 3 = 0$ . Então,  $n = 3$ , o que é uma contradição dado que, por hipótese,  $n \geq 4$ . Portanto, 1 não é autovalor de  $M$  e seus autovalores são respectivamente  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Finalmente, sem perda de generalidades podemos considerar  $\alpha > \beta > \gamma$ . Assim, o spread de  $Q(S_n^3)$  é trivialmente dado por  $\max\{\alpha, 1\} - \min\{\gamma, 1\}$ . ■

## 4 Conclusão

Apresentamos explicitamente o  $Q$ -espectro de um grafo em uma subclasse dos grafos caminho-completo. Com isso, pudemos determinar o spread desses grafos. Quanto ao  $Q$ -espectro de um grafo pertencente a uma pequena classe de grafos unicyclicos, só pudemos determiná-lo de forma implícita em função dos valores do determinante de uma matriz  $3 \times 3$ .

Pretendemos utilizar os resultados aqui encontrados num próximo trabalho sobre a determinação de um grafo cujo *spread* atenda ao valor máximo dentre os possíveis valores para o *spread* da matriz laplaciana sem sinal de um grafo qualquer.

**Agradecimento:** O último autor desenvolveu este trabalho graças ao auxílio do CNPq dado pelo Projeto 300563/94 – 9(NV).

## Referências

- [1] S. Belhaiza, Abreu, N. M. M., Hansen, P., Oliveira, C. S., Variable neighborhood search for extremal graphs. XI. Bounds on algebraic connectivity, Gerad, Graph Theory and Combinatorial Optimization, **8**, (2005) 1–16.
- [2] D. Cvetković, Signless laplacians and line graphs, Bulletin T. CXXXI de l' Académie serbe des sciences et des arts (2005) Classe des Sciences mathématiques et naturelles Sciences mathématiques **30** (2005) 85–92.
- [3] D. Cvetković, P. Rowlinson and S. Simić, Signless Laplacian of finite graphs, Linear Algebra and its Applications **423** (2007) 155–171.
- [4] D. A. Gregory, D. Hershkowitz and S. J. Kirkland, The spread of the spectrum of a graph, Linear Algebra and its Applications **332–334** (2001) 23–35.
- [5] E. Jiang and X. Zhan, Lower Bounds for the Spread of a Hermitian Matrix, Linear Algebra and its Applications **256** (1997) 153–163.
- [6] J. Kaarlo Merikoski and R. Kumar, Characterizations and lower bounds for the spread of a normal matrix, Linear Algebra and its Applications **364** (2003) 13–31.
- [7] C. Yan, Properties of spectra of graphs and line graphs, Appli. Math. J. Chinese Univ. Ser.B **3** (2002) 371–376.
- [8] R. Merris, Laplacian Matrices of Graphs: A Survey, Linear Algebra and its Applications **197–198** (1997) 143–176.