

# Análise de sistemas lineares oriundos da formulação fraca da velocidade de Darcy baseada em multiplicadores de Lagrange

César Guilherme de Almeida

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática, UFU

38408-100, Uberlândia, MG

E-mail: cesargui@ufu.br

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é apresentar uma análise dos sistemas lineares provenientes de técnicas de aproximação para a solução de equações elípticas, utilizando espaços de Raviart-Thomas [5] de baixa ordem. Em especial, será considerada a equação que fornece a velocidade de Darcy para escoamentos em meios porosos, levando-se em conta tanto permeabilidades escalares como permeabilidades na forma de tensor, definidas em malhas regulares de um domínio retangular. Neste trabalho é apresentada uma prova, usando argumentos locais, do fato que o sistema linear associado a uma formulação fraca das equações de Darcy com multiplicadores de Lagrange relacionados ao fluxo normal e que aproximam a pressão nas arestas possui matriz simétrica e definida positiva.

## 1. Introdução

Trabalhos recentes envolvendo simulação de escoamentos em meios porosos [4, 9, 1, 10] (Aquino et al., 2007; Ribeiro, 2007; Abreu et al. 2008; Silva, 2008) continuam utilizando uma simplificação sugerida em [6] Chavent e Roberts (1991) para o cálculo da velocidade de Darcy. A técnica emprega elementos finitos mistos e híbridos e integração numérica (regra do trapézio) na formulação fraca da equação da velocidade; em geral o comprimento da malha computacional é o mesmo na direção  $x$  e na direção  $y$  ( $h = h_x = h_y$ ) e a permeabilidade ( $K$ ) é um escalar.

A motivação para este trabalho surgiu com a elaboração da dissertação [10], que apresenta um novo algoritmo para o cálculo de permeabilidades equivalentes (veja [8] Durlfolsky, 1991), considerando um tensor diagonal de permeabilidade. Os códigos desenvolvidos no Laboratório de Modelagem Multi-escala e Transporte de Partículas (LABTRAN) do IPRJ-UERJ, referentes ao

cálculo da velocidade de Darcy, não estavam adaptados para o caso onde  $K$  é um tensor de ordem dois. Com o objetivo de realizar tal adaptação foram iniciados os estudos que estão, em parte, presentes neste trabalho, o qual exhibe uma generalização das técnicas apresentadas no artigo [6], com atenção especial para a demonstração de que a matriz do sistema linear oriundo da formulação fraca da equação da velocidade é definida positiva, se o tensor  $K$  satisfizer certas restrições.

Para iniciar os estudos deste trabalho, considere a lei de Darcy (desprezando-se os efeitos gravitacionais):

$$u(x) = Q/A = -(K/\mu) \nabla p, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

onde  $\Omega = [0, X] \times [0, Y] \subset R^2$  é um domínio retangular;  $Q$  é a taxa volumétrica do fluxo;  $\nabla p$ ,  $p = p(x,y) \equiv p(x)$ , é o gradiente de pressão;  $A$  é a área da seção transversal normal à direção do fluxo;  $\mu = \mu(x)$  é a viscosidade do fluido e  $K = K(x)$  é a permeabilidade do meio poroso. As técnicas de discretização utilizadas neste trabalho são aplicadas num sistema de equações formado por (1) acima e por

$$\nabla \cdot u = q, \quad \forall x \in \Omega \quad (2)$$

onde  $q = q(x)$  é um termo de fonte.

Seguindo a mesma técnica sugerida em [5], mas considerando, também, a possibilidade de se trabalhar com um tensor de permeabilidade  $K$  [2] (Almeida, 2007), ao invés de considerar apenas permeabilidade escalar, a discretização da equação da pressão, Eq. (2), usará elementos finitos mistos e híbridos. Maiores informações sobre elementos finitos mistos e híbridos podem ser obtidas no artigo [7] (Douglas, Furtado e Pereira, 1997; escoamento imiscível), e no [3] (Almeida, Douglas e Pereira, 2002; escoamento miscível).

## 2. Espaço de Raviart-Thomas

Denote, respectivamente,  $n_x$  e  $n_y$  os números de subintervalos de  $[0, X]$  e  $[0, Y]$  (associados ao domínio retangular  $\Omega$ ), e,  $h_x = X/n_x$ ,  $h_y = Y/n_y$ , os comprimentos desses subintervalos. Então, considerando-se a partição do domínio em elementos retangulares do tipo  $E = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ,

onde  $x_i = ih_x$ ,  $1 \leq i \leq n_x$ ,  $y_j = jh_y$ ,  $1 \leq j \leq n_y$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , o espaço vetorial de Raviart-Thomas, sobre tal elemento, é gerado pelas funções vetoriais:

$$W_R = \frac{1}{h_x h_y} (x - x_{i-1}, 0), \quad W_L = \frac{1}{h_x h_y} (x - x_i, 0);$$

$$W_U = \frac{1}{h_x h_y} (0, y - y_{j-1}), \quad W_D = \frac{1}{h_x h_y} (0, y - y_j).$$

As quatro funções base são linearmente independentes. O espaço vetorial gerado por tais funções fornecerá aproximações para o campo de velocidades em  $E$ . As letras  $R$ ,  $L$ ,  $U$  e  $D$  são referentes às arestas direita, esquerda, de cima e de baixo, respectivamente, do elemento  $E$ . Assim, a velocidade de Darcy, neste elemento, é aproximada por:

$$u = u_R W_R + u_L W_L + u_U W_U + u_D W_D$$

$$\equiv \sum_{\alpha} u_{\alpha} W_{\alpha} \quad (3)$$

onde  $u_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \{R, L, U, D\}$ , são denominadas componentes ortogonais do fluxo através das interfaces na direção normal exterior. Para garantir a continuidade do fluxo na aresta  $\alpha$  do elemento  $E$ , e conseqüentemente na aresta  $\alpha'$  do elemento vizinho  $\tilde{E}$  (veja Fig. 1), a seguinte igualdade deve ser satisfeita:  $u_{E,\alpha} + u_{\tilde{E},\alpha'} = 0$ . Note que, dada uma aresta  $\alpha$  qualquer de um elemento  $E$  da partição do domínio  $\Omega$ , a notação para o elemento vizinho de  $E$  em relação à aresta  $\alpha$  é dada por  $\tilde{E}$  (veja a Fig. 1). As seguintes arestas são ditas opostas: se  $\alpha = L$ , então  $\alpha' = R$ ; se  $\alpha = R$ , então  $\alpha' = L$ ; se  $\alpha = D$ , então  $\alpha' = U$ ; se  $\alpha = U$ , então  $\alpha' = D$ . Por exemplo, se  $\alpha = L$ , então  $\tilde{E}$  será o elemento vizinho à esquerda de  $E$  (na Fig. 1,  $\tilde{E} = E_{i-1,j}$ ). Tanto no elemento  $E$  como no  $\tilde{E}$  a razão  $r = h_x/h_y$ , ou  $r^{-1}$ , permanece constante.

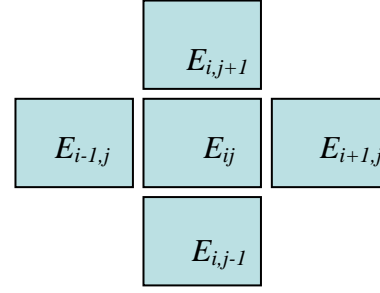


Figura 1. Elemento  $E = E_{i,j}$  da partição do domínio  $\Omega$  e seus vizinhos.

Se a permeabilidade for uma função escalar, denote por  $a$  o valor de  $K/\mu > 0$ , na

Eq. (1). Se  $K = K(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} k_{11} & k \\ k & k_{22} \end{pmatrix}$  for um

tensor definido positivo, é melhor reescrever a lei de Darcy como segue:  $\mu K^{-1}u = -\nabla p$ , para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ . O inverso do tensor  $K$  é dado por:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} k_{22} & -k \\ -k & k_{11} \end{pmatrix} \frac{1}{\det(K)}.$$

## 3. Sistema de equações envolvendo os multiplicadores de Lagrange

A forma fraca da Eq. (1) (velocidade de Darcy) é dada pela seguinte equação integral:

$$\iint_E (1/a) u \cdot W \, d\mathbf{x} = - \iint_E \nabla p \cdot W \, d\mathbf{x},$$

para todo  $W \in H(\text{div}, E)$ , se  $K$  for um escalar;

$$\iint_E \mu K^{-1} u \cdot W \, d\mathbf{x} = - \iint_E \nabla p \cdot W \, d\mathbf{x},$$

para todo  $W \in H(\text{div}, E)$ , se  $K$  for um tensor,

onde  $H(\text{div}, \Omega) = \{F = (f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega); \nabla \cdot F \in L^2(\Omega)\}$ : espaço das funções vetoriais cujo divergente é de quadrado integrável, com funções coordenadas também de quadrado integrável em  $\Omega$ .

A formulação fraca da equação anterior considera que:  $u$  satisfaz à Eq. (3); as funções  $a$  e  $\mu$  são constantes em cada elemento  $E$ , assumindo aí os valores  $a_E$  e  $\mu_E$ ; a função  $p$  é constante no interior de cada elemento  $E$ , assumindo aí o valor  $p_E$ ; para cada uma das quatro arestas ( $\beta$ ) que compõe a fronteira de  $E$  a pressão assume o valor constante  $\ell_{E,\beta}$ , que pode ser distinto em cada

aresta de  $E$ , porém  $\ell_{E,\beta} = \ell_{\tilde{E},\beta}$ , o que garante a continuidade da pressão em arestas adjacentes de elementos vizinhos; e, finalmente,  $W = W_\beta$ ,  $\beta \in \{R, L, U, D\}$ .

A formulação fraca para a equação elíptica, Eq. (2), é dada por  $\Sigma_\beta u_{E,\beta} \iint_E \nabla \cdot W_\beta dx = q_E h_x h_y$ , ou seja,

$$\Sigma_\beta u_{E,\beta} = q_E h_x h_y \equiv \Phi_E. \quad (4)$$

Considere a equação integral dada no início desta seção. Para cada  $\beta$ , são resolvidas as integrais do lado esquerdo e do lado direito, esta última utilizando integração por partes para forçar o aparecimento da variável  $\ell_{E,\beta}$  (Multiplicadores de Lagrange). Desta forma é possível construir um sistema de equações relacionando a pressão, as componentes ortogonais do fluxo e os multiplicadores de Lagrange, em cada elemento  $E$ . Utilizando a continuidade do fluxo ( $u_{E,\beta} + u_{\tilde{E},\beta} = 0$ ) e a Eq. (4) é possível eliminar as variáveis de fluxo e a pressão, obtendo-se as seguintes equações (veja [2]) associadas aos sistemas lineares oriundos das formulações fracas utilizadas neste trabalho:

$$a_E \Sigma_\alpha (\hat{A}_{E,\beta\alpha} - \sigma_{E,\beta\alpha}) \ell_{E,\alpha} + a_{\tilde{E}} \Sigma_\alpha (\hat{A}_{\tilde{E},\beta\alpha} - \sigma_{\tilde{E},\beta\alpha}) \ell_{\tilde{E},\alpha} = \Phi_E S_{E,\beta} (S_E)^{-1} + \Phi_{\tilde{E}} S_{\tilde{E},\beta} (S_{\tilde{E}})^{-1}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \Sigma_\alpha (\hat{A}_{E,\beta\alpha} - \sigma_{E,\beta\alpha}) \ell_{E,\alpha} + \\ & (\mu_{\tilde{E}})^{-1} \Sigma_\alpha (\hat{A}_{\tilde{E},\beta\alpha} - \sigma_{\tilde{E},\beta\alpha}) \ell_{\tilde{E},\alpha} = \\ & \Phi_E S_{E,\beta} (S_E)^{-1} + \Phi_{\tilde{E}} S_{\tilde{E},\beta} (S_{\tilde{E}})^{-1}. \end{aligned}$$

Considerando-se  $K$  um tensor, segue que a matriz  $\hat{A}_E = \begin{pmatrix} B_1 & B \\ B & B_2 \end{pmatrix}$  possui a seguinte estrutura:

$$B_1 = r^{-1} (k_{22})^{-1} M; \quad B = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_2 = r(k_{11})^{-1} M, \text{ onde}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 \det(K) + k^2 & 2 \det(K) - k^2 \\ 2 \det(K) - k^2 & 4 \det(K) + k^2 \end{pmatrix}.$$

Na matriz  $\hat{A}_E$  a primeira, a segunda, a terceira e a quarta linha correspondem às arestas  $R, L, U$  e  $D$ , respectivamente. O mesmo vale para as

colunas;  $\sigma_E = 3r\theta \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ , com  $\theta =$

$\det(K) / [r^2 k_{22} + k_{11}]$ ; os blocos dois por dois são dados por  $C_{11} = r^{-2} k_{11} (k_{22})^{-1} N$ ;  $C_{22} = r^2 k_{22} (k_{11})^{-1} N$ ;  $C_{12} = C_{21} = N$ , onde  $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $S_{E,\beta} = 6 \det(K) (k_{\beta\beta})^{-1} r_\beta$ , onde  $(k_{\beta\beta})^{-1} r_\beta = (k_{22})^{-1} r^{-1}$ , se  $\beta \in \{R, L\}$  e  $(k_{\beta\beta})^{-1} r_\beta = (k_{11})^{-1} r$ , se  $\beta \in \{U, D\}$ ;  $S_E = 12 \det(K) (rk_{11} k_{22})^{-1} (k_{22} r^2 + k_{11})$ . Para recuperar o caso escalar basta considerar o tensor  $K$  com as seguintes características:  $k = 0$  e  $k_{11} = k_{22}$ .

#### 4. Análise do sistema linear dos multiplicadores de Lagrange

Nesta análise, a permeabilidade  $K$  será considerada um escalar ou um tensor. O objetivo é apresentar um estudo que garantirá que as matrizes dos sistemas lineares que têm como incógnitas os multiplicadores de Lagrange são simétricas e definidas positivas.

A figura a seguir (Fig. 2) exibe um exemplo de numeração das arestas correspondentes à partição do domínio em malhas retangulares.

	13	17	21
7	8	9	20
4	12	16	6
1	11	15	19
	10	14	18

Figura 2. Numeração das arestas

Utilizando a numeração apresentada na Fig. 2 obtém-se a matriz global dos Multiplicadores de Lagrange exibida na Fig. 3 (somente a diagonal e a parte inferior são exibidas, pois a matriz é simétrica; X corresponde aos elementos não nulos da matriz e os espaços em branco representam elementos nulos):

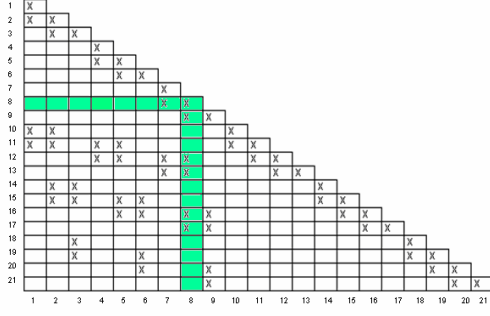


Figura 3. Modelo de matriz global

As seguintes arestas devem ser consideradas na numeração,  $\alpha_L$ : numeração das arestas que pertencem à fronteira vertical esquerda do domínio retangular;  $\alpha_R$ : numeração das arestas verticais que estão no interior do domínio, exceto aquelas (arestas 3, 6 e 9, na Fig. 2) correspondentes à última interface vertical antes da fronteira direita do domínio;  $\alpha_{FR}$ : numeração das arestas verticais que pertencem à última interface antes da fronteira direita do domínio;  $\alpha_D$ : numeração das arestas que pertencem à fronteira inferior do domínio retangular;  $\alpha_U$ : numeração das arestas horizontais que estão no interior do domínio retangular;  $\alpha_{FU}$ : numeração das arestas horizontais que pertencem à fronteira superior do domínio retangular. Na fronteira direita do domínio é imposta a condição de Dirichlet:  $\ell_R = 0$  – pressão nula. Nas demais fronteiras a condição imposta é a de fluxo nulo.

Considere, por exemplo, a aresta de número 8 na Fig. 2 (veja o destaque na Fig. 3); trata-se de uma aresta interna do tipo  $\alpha_R$ . Observe que esta aresta está relacionada com as seguintes arestas: 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, as quais pertencem aos elementos que contém a aresta 8. A equação do sistema linear associada à aresta 8 (fórmula de sete pontos) é dada por

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \{ \ell_{E,L} [ (k_{22}r)^{-1} (2 \det(K) - k^2) - \\ & 3r\theta r^{-2} k_{11}(k_{22})^{-1} ] + \ell_{E,R} [ (k_{22}r)^{-1} (4 \det(K) + k^2) - \\ & 3r\theta r^{-2} k_{11}(k_{22})^{-1} ] - \ell_{E,D} [ k + 3r\theta ] + \\ & \ell_{E,U} [ k - 3r\theta ] \} + \\ & (\mu_{\bar{E}})^{-1} \{ \ell_{\bar{E},L} [ (k_{\bar{E},22}r)^{-1} (4 \det(K_{\bar{E}}) + (k_{\bar{E}})^2) - \\ & 3r\theta_{\bar{E}} r^{-2} k_{\bar{E},11}(k_{\bar{E},22})^{-1} ] + \\ & \ell_{\bar{E},R} [ (k_{\bar{E},22}r)^{-1} (2 \det(K_{\bar{E}}) - (k_{\bar{E}})^2) - \\ & 3r\theta_{\bar{E}} r^{-2} k_{\bar{E},11}(k_{\bar{E},22})^{-1} ] + \ell_{\bar{E},D} [ k_{\bar{E}} - 3r\theta_{\bar{E}} ] - \\ & \ell_{\bar{E},U} [ k_{\bar{E}} + 3r\theta_{\bar{E}} ] \} = \\ & (1/2) h_x h_y [ (q_{\bar{E}} k_{11}) / (r^2 k_{22} + k_{11}) + \end{aligned}$$

$$(q_{\bar{E}} k_{\bar{E},11}) / (r^2 k_{\bar{E},22} + k_{\bar{E},11}) ]. \quad (6)$$

Agora, considere a numeração como a da Fig. 2 para as arestas. Sejam  $n = n_x$  e  $m = n_y$  (veja Seção 2), então o vetor global de incógnitas será composto por blocos de vetores do tipo  $(\ell_{L,1j}, \ell_{R,1j}, \ell_{R,2j}, \dots, \ell_{R,(n-1)j})^T$ , e do tipo  $(\ell_{D,i1}, \ell_{U,i1}, \ell_{U,i2}, \dots, \ell_{U,im})^T$ , com  $1 \leq j \leq n_y$  e  $1 \leq i \leq n_x$ , respectivamente. A notação  $\ell_{\alpha ij}$  refere-se ao multiplicador  $\ell_{E,\alpha}$  associado ao elemento  $E = E_{ij}$ , conforme a Fig. 1. Seja  $A_{\beta,\alpha}$  um elemento da matriz global. Nesta notação,  $\alpha$  e  $\beta$  dizem respeito tanto à numeração da aresta como também ao tipo de aresta ( $L$ ,  $R$ ,  $D$  ou  $U$ ) associada ao elemento que a contém. Considerando a Fig. 2, por exemplo,  $A_{1,10}$  está associado às arestas  $\alpha_L = 1$  e  $\alpha_D = 10$ , ambas contidas no elemento  $E_{1,1}$ ;  $A_{8,8}$  está associado à aresta  $\alpha_R = 8$ , que está contida tanto no elemento  $E_{1,3}$  (aresta direita, associada ao multiplicador  $\ell_R$ ) quanto no  $E_{2,3}$  (aresta esquerda, associada ao multiplicador  $\ell_L$ ). Assim, os elementos da matriz global são escritos como  $A_{\beta,\alpha} = \sum_E (\mu_E)^{-1} (\hat{A}_{E,\beta\alpha} - \sigma_{E,\beta\alpha})$ ; o somatório é realizado em todos os elementos  $E$  que contém ambas as arestas:  $\alpha$  e  $\beta$ . Como as matrizes  $(A_E)^{-1}$  e  $\sigma_E$  são simétricas então  $A_{\beta,\alpha} = A_{\alpha,\beta}$ , ou seja, a matriz global dos multiplicadores é simétrica.

Seja  $\ell$  o vetor global de incógnitas (composto por blocos de vetores, conforme explicado anteriormente). Baseado na Eq. (6) tem-se que o produto da matriz global,  $A$ , pelo vetor  $\ell$  é um vetor composto pelos blocos de vetores do tipo

$$\begin{aligned} & (\sum_{\alpha} c_{\alpha 1j} \ell_{\alpha 1j}, \sum_{\alpha} d_{\alpha 1j} \ell_{\alpha 1j} + \\ & \sum_{\alpha} d_{\alpha 2j} \ell_{\alpha 2j}, \dots, \sum_{\alpha} d_{\alpha ij} \ell_{\alpha ij} + \sum_{\alpha} d_{\alpha(i+1)j} \ell_{\alpha(i+1)j}, \\ & \dots, \sum_{\alpha} d_{\alpha(n-2)j} \ell_{\alpha(n-2)j} + \sum_{\alpha} d_{\alpha(n-1)j} \ell_{\alpha(n-1)j}, \\ & \sum_{\alpha} e_{\alpha(n-1)j} \ell_{\alpha(n-1)j} + \sum_{\alpha} e_{\alpha nj} \ell_{\alpha nj})^T; \\ & (\sum_{\alpha} f_{\alpha i1} \ell_{\alpha i1}, \sum_{\alpha} g_{\alpha i1} \ell_{\alpha i1} + \\ & \sum_{\alpha} g_{\alpha i2} \ell_{\alpha i2}, \dots, \sum_{\alpha} g_{\alpha ij} \ell_{\alpha ij} + \sum_{\alpha} g_{\alpha i(j+1)} \ell_{\alpha i(j+1)}, \\ & \dots, \sum_{\alpha} g_{\alpha i(m-1)} \ell_{\alpha i(m-1)} + \sum_{\alpha} g_{\alpha im} \ell_{\alpha im}, \\ & \sum_{\alpha} w_{\alpha im} \ell_{\alpha im})^T; \end{aligned}$$

com  $1 \leq j \leq n_y$  e  $1 \leq i \leq n_x$ . Note que  $c_{\alpha}$ ,  $d_{\alpha}$ ,  $e_{\alpha}$ ,  $f_{\alpha}$ ,  $g_{\alpha}$  e  $w_{\alpha}$  são os coeficientes de  $\ell_{\alpha}$  referentes a um elemento  $E = E_{ij}$ . Desta forma, o produto  $\ell^T A \ell$  é dado por

$$\sum_{j=1}^m \{ \ell_{L,1j} \sum_{\alpha} c_{\alpha 1j} \ell_{\alpha 1j} +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-2} \ell_{R,ij} (\Sigma_{\alpha} d_{\alpha,ij} \ell_{\alpha,ij} + \Sigma_{\alpha} d_{\alpha,(i+1)j} \ell_{\alpha,(i+1)j}) + \\
& + \ell_{R,(n-1)j} (\Sigma_{\alpha} e_{\alpha,(n-1)j} \ell_{\alpha,(n-1)j} + \Sigma_{\alpha} e_{\alpha,nj} \ell_{\alpha,nj}) \} + \\
& \sum_{i=1}^n \{ \ell_{D,il} \Sigma_{\alpha} f_{\alpha,il} \ell_{\alpha,il} + \\
& \sum_{j=1}^{m-1} \ell_{U,ij} (\Sigma_{\alpha} g_{\alpha,ij} \ell_{\alpha,ij} + \Sigma_{\alpha} g_{\alpha,i(j+1)} \ell_{\alpha,i(j+1)}) \} + \\
& + \ell_{U,im} (\Sigma_{\alpha} w_{\alpha,im} \ell_{\alpha,im}) \}. \quad (7)
\end{aligned}$$

#### 4.1 Permeabilidade escalar

Sabendo que  $r^{-1}/[r(r^2+I)^{-1}] = 1 + r^2$  e  $r/[r(r^2+I)^{-1}] = 1 + r^2$ , o lado esquerdo da fórmula de sete pontos (veja Eq. (6)) para arestas verticais do tipo  $\alpha_L$  é dado por

$$\begin{aligned}
& a_E \{ [4r^{-1} - (3r/(r^2+I))r^{-2}] \ell_{E,L} + \\
& [2r^{-1} - (3r/(r^2+I))r^{-2}] \ell_{E,R} \} - \\
& [3r/(r^2+I)] \ell_{E,D} - [3r/(r^2+I)] \ell_{E,U} \} = \\
& a_E r(r^2+I)^{-1} \{ [4+r^2] \ell_{E,L} + \\
& [2-r^2] \ell_{E,R} - 3\ell_{E,D} - 3\ell_{E,U} \}.
\end{aligned}$$

O lado esquerdo da fórmula de sete pontos para arestas verticais do tipo  $\alpha_R$  é dado por

$$\begin{aligned}
& a_E r(r^2+I)^{-1} \{ [2-r^2] \ell_{E,L} + \\
& [4+r^2] \ell_{E,R} - 3\ell_{E,D} - 3\ell_{E,U} \} + a_{\bar{E}} r(r^2+I)^{-1} \{ \\
& [4+r^2] \ell_{\bar{E},L} + [2-r^2] \ell_{\bar{E},R} - 3\ell_{\bar{E},D} - 3\ell_{\bar{E},U} \}.
\end{aligned}$$

Observação:  $\ell_{\bar{E},L} = \ell_{E,R}$ .

Para arestas verticais do tipo  $\alpha_{FR}$  obtém-se

$$\begin{aligned}
& a_E r(r^2+I)^{-1} \{ [2-r^2] \ell_{E,L} + \\
& [4+r^2] \ell_{E,R} - 3\ell_{E,D} - 3\ell_{E,U} \} + a_{\bar{E}} r(r^2+I)^{-1} \{ \\
& [4+r^2] \ell_{\bar{E},L} - 3\ell_{\bar{E},D} - 3\ell_{\bar{E},U} \}.
\end{aligned}$$

Observação:  $\ell_{\bar{E},R} = 0$ , pois é válida a condição de Dirichlet (pressão nula na fronteira direita).

Para arestas horizontais do tipo  $\alpha_D$  obtém-se

$$\begin{aligned}
& a_E r(r^2+I)^{-1} \{ -3\ell_{E,L} - 3\ell_{E,R} + \\
& [4+r^2] \ell_{E,D} + [2-r^2] \ell_{E,U} \}.
\end{aligned}$$

Observação: Se o elemento for do tipo  $E_{nj}$ ,  $n = n_x$ , então  $\ell_{E,R} = 0$ , pois o multiplicador estará na fronteira direita do domínio.

Para arestas horizontais do tipo  $\alpha_U$  obtém-se

$$\begin{aligned}
& a_E r(r^2+I)^{-1} \{ -3\ell_{E,L} - 3\ell_{E,R} + \\
& [2-r^2] \ell_{E,D} + [4+r^2] \ell_{E,U} \} + \\
& a_{\bar{E}} r(r^2+I)^{-1} \{ -3\ell_{\bar{E},L} - 3\ell_{\bar{E},R} + \\
& [4+r^2] \ell_{\bar{E},D} + [2-r^2] \ell_{\bar{E},U} \}.
\end{aligned}$$

Observação:  $\ell_{\bar{E},D} = \ell_{E,U}$ . Se o elemento for do tipo  $E_{nj}$ ,  $n = n_x$ , então  $\ell_{E,R} = 0$  e  $\ell_{\bar{E},R} = 0$ , devido à condição de Dirichlet.

Para arestas horizontais do tipo  $\alpha_{FU}$  obtém-se

$$\begin{aligned}
& a_E r(r^2+I)^{-1} \{ -3\ell_{E,L} - 3\ell_{E,R} + \\
& [2-r^2] \ell_{E,D} + [4+r^2] \ell_{E,U} \}.
\end{aligned}$$

Observação: Se o elemento for do tipo  $E_{nj}$ ,  $n = n_x$ , então  $\ell_{E,R} = 0$ .

O cálculo de  $\ell^T A \ell$  será realizado da seguinte forma: i) considere a Eq. (6) e localize os cálculos em um elemento  $E = E_{ij}$  (veja Fig. 1), isto é, coloque em evidência o valor de  $a_E$  (para  $K$  escalar); ii) obtenha os valores dos coeficientes  $c_{\alpha}$ ,  $d_{\alpha}$ ,  $e_{\alpha}$ ,  $f_{\alpha}$ ,  $g_{\alpha}$  e  $w_{\alpha}$  utilizando as expressões referentes ao lado esquerdo da fórmula de 7 pontos; iii) use a notação:  $\ell_{E,L} = \ell_1$ ;  $\ell_{E,R} = \ell_2$ ;  $\ell_{E,D} = \ell_3$  e  $\ell_{E,U} = \ell_4$ , conforme a Fig. 4 abaixo.

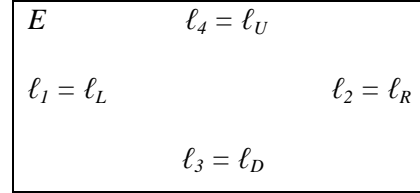


Figura 4. Numeração local

Desta forma, o cálculo referente ao elemento  $E$  terá a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& a_E r(r^2+I)^{-1} \{ 2 [ (\ell_1 + \ell_2) - (\ell_3 + \ell_4) ]^2 \\
& + (\ell_1 - \ell_3)^2 + (\ell_1 - \ell_4)^2 + (\ell_2 - \ell_3)^2 + (\ell_2 \\
& - \ell_4)^2 + r^2 (\ell_1 - \ell_2)^2 + r^2 (\ell_3 - \ell_4)^2 \}.
\end{aligned}$$

Daí segue que  $\ell^T A \ell \geq 0$ . Note que  $\ell^T A \ell = 0$  se, e somente se,  $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4$  em todo elemento  $E$ . Mas para  $E = E_{nj}$ , com  $n = n_x$ , tem-se que  $\ell_2 = \ell_{E,R} = 0$ , devido à condição de Dirichlet. Isto conduz a  $\ell_1 = \ell_{E,L} = 0$ . Como  $\ell_{E,L} = \ell_{\bar{E},R}$ , então  $\ell^T A \ell = 0 \Rightarrow \ell = \mathbf{0}$  (vetor nulo), portanto,  $\ell \neq \mathbf{0} \Rightarrow \ell^T A \ell > 0$ .

#### 4.2 Permeabilidade na forma de tensor

Sabendo que  $\theta = \det(K) / [r^2 k_{22} + k_{11}]$ , são válidas as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} & \{ [r^{-1}(2\det(K) - k^2)]/k_{22} \} - \\ (3 r\theta r^2 k_{11})/k_{22} &= (r^{-1}/k_{22}) \{ [2\det(K)r^2 k_{22} + \\ 2\det(K)k_{11} - 3\det(K)k_{11}]/[r^2 k_{22} + k_{11}] \} - \\ (r^{-1}k^2)/k_{22} &= 2r\theta - r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta - (r^{-1}k^2)/k_{22}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ [r^{-1}(4\det(K) + k^2)]/k_{22} \} - \\ (3 r\theta r^2 k_{11})/k_{22} &= (r^{-1}/k_{22}) \{ [4\det(K)r^2 k_{22} + \\ 4\det(K)k_{11} - 3\det(K)k_{11}]/[r^2 k_{22} + k_{11}] \} + \\ (r^{-1}k^2)/k_{22} &= 4r\theta + r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta + (r^{-1}k^2)/k_{22}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ [r(2\det(K) - k^2)]/k_{11} \} - (3 r\theta r^2 k_{22})/k_{11} \\ = (r/k_{11}) \{ [2\det(K)r^2 k_{22} - 3 r^2 \det(K)k_{22} + \\ 2\det(K)k_{11}]/[r^2 k_{22} + k_{11}] \} - (rk^2)/k_{11} &= 2r\theta - \\ r^3(k_{22}/k_{11})\theta - (rk^2)/k_{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ [r(4\det(K) + k^2)]/k_{11} \} - \\ (3 r\theta r^2 k_{22})/k_{11} &= (r/k_{11}) \{ [4\det(K)r^2 k_{22} - \\ 3r^2 \det(K)k_{22} + 4\det(K)k_{11}]/[r^2 k_{22} + k_{11}] \} + \\ (rk^2)/k_{11} &= 4r\theta + r^3(k_{22}/k_{11})\theta + (rk^2)/k_{11}. \end{aligned}$$

O lado esquerdo da fórmula de sete pontos (veja Eq. (6)) para arestas verticais do tipo  $\alpha_L$  é dado por

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \{ [4r\theta + r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta + \\ (r^{-1}k^2)/k_{22}] \ell_{E,L} + [2r\theta - r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta \\ - (r^{-1}k^2)/k_{22}] \ell_{E,R} + [k - 3r\theta] \ell_{E,D} - \\ [k + 3r\theta] \ell_{E,U} \}. \end{aligned}$$

Para arestas verticais do tipo  $\alpha_R$  obtém-se

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \{ [2r\theta - r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta - \\ (r^{-1}k^2)/k_{22}] \ell_{E,L} + [4r\theta + r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta \\ + (r^{-1}k^2)/k_{22}] \ell_{E,R} - [k + 3r\theta] \ell_{E,D} + \\ [k - 3r\theta] \ell_{E,U} \} + \\ & (\mu_{\bar{E}})^{-1} \{ [4r\theta_{\bar{E}} + r^{-1}(k_{\bar{E},11}/k_{\bar{E},22})\theta_{\bar{E}} + \\ (r^{-1}(k_{\bar{E}})^2)/k_{\bar{E},22}] \ell_{\bar{E},L} + [2r\theta_{\bar{E}} - r^{-1}(k_{\bar{E},11}/k_{\bar{E},22})\theta_{\bar{E}} - \\ (r^{-1}(k_{\bar{E}})^2)/k_{\bar{E},22}] \ell_{\bar{E},R} + [k_{\bar{E}} - 3r\theta_{\bar{E}}] \ell_{\bar{E},D} - \\ [k_{\bar{E}} + 3r\theta_{\bar{E}}] \ell_{\bar{E},U} \}. \end{aligned}$$

Para arestas verticais do tipo  $\alpha_{FR}$  obtém-se

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \{ [2r\theta - r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta - \\ (r^{-1}k^2)/k_{22}] \ell_{E,L} + [4r\theta + r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta \\ + (r^{-1}k^2)/k_{22}] \ell_{E,R} - [k + 3r\theta] \ell_{E,D} + \\ [k - 3r\theta] \ell_{E,U} \} + \\ & (\mu_{\bar{E}})^{-1} \{ [4r\theta_{\bar{E}} + r^{-1}(k_{\bar{E},11}/k_{\bar{E},22})\theta_{\bar{E}} + \\ (r^{-1}(k_{\bar{E}})^2)/k_{\bar{E},22}] \ell_{\bar{E},L} + [k_{\bar{E}} - 3r\theta_{\bar{E}}] \ell_{\bar{E},D} - \\ [k_{\bar{E}} + 3r\theta_{\bar{E}}] \ell_{\bar{E},U} \}. \end{aligned}$$

Para arestas horizontais do tipo  $\alpha_D$  obtém-se

$$(\mu_E)^{-1} \{ [k - 3r\theta] \ell_{E,L} - [k + 3r\theta] \ell_{E,R}$$

$$+ [4r\theta + r^3(k_{22}/k_{11})\theta + (rk^2)/k_{11}] \ell_{E,D} + [2r\theta - r^3(k_{22}/k_{11})\theta - (rk^2)/k_{11}] \ell_{E,U} \}.$$

Para arestas horizontais do tipo  $\alpha_U$  obtém-se

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \{ - [k + 3r\theta] \ell_{E,L} + [k - 3r\theta] \ell_{E,R} \\ + [2r\theta - r^3(k_{22}/k_{11})\theta - (rk^2)/k_{11}] \ell_{E,D} + \\ [4r\theta + r^3(k_{22}/k_{11})\theta + (rk^2)/k_{11}] \ell_{E,U} \} + \\ & (\mu_{\bar{E}})^{-1} \{ [k_{\bar{E}} - 3r\theta_{\bar{E}}] \ell_{\bar{E},L} - [k_{\bar{E}} + 3r\theta_{\bar{E}}] \ell_{\bar{E},R} + [4r\theta_{\bar{E}} \\ + r^3(k_{\bar{E},22}/k_{\bar{E},11})\theta_{\bar{E}} + (r(k_{\bar{E}})^2)/k_{\bar{E},11}] \ell_{\bar{E},D} + [2r\theta_{\bar{E}} - \\ r^3(k_{\bar{E},22}/k_{\bar{E},11})\theta_{\bar{E}} - (r(k_{\bar{E}})^2)/k_{\bar{E},11}] \ell_{\bar{E},U} \}. \end{aligned}$$

Para arestas horizontais do tipo  $\alpha_{FU}$  obtém-se

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \{ - [k + 3r\theta] \ell_{E,L} + [k - 3r\theta] \ell_{E,R} \\ + [2r\theta - r^3(k_{22}/k_{11})\theta - (rk^2)/k_{11}] \ell_{E,D} + [4r\theta + \\ r^3(k_{22}/k_{11})\theta + (rk^2)/k_{11}] \ell_{E,U} \}. \end{aligned}$$

O cálculo de  $\ell^T A \ell$  será realizado de forma análoga ao procedimento utilizado na Subseção 4.1. Desta forma, o cálculo referente ao elemento  $E$  terá a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & (\mu_E)^{-1} \{ \ell_1 [ \ell_1 (4r\theta + r^{-1}\theta(k_{11}/k_{22}) + \\ k^2 r^{-1}(k_{22})^{-1}) + \ell_2 (2r\theta - r^{-1}\theta(k_{11}/k_{22}) - \\ k^2 r^{-1}(k_{22})^{-1}) + \ell_3 (k - 3r\theta) - \\ \ell_4 (k + 3r\theta) ] + \ell_2 [ \ell_1 (2r\theta - \\ r^{-1}\theta(k_{11}/k_{22}) - k^2 r^{-1}(k_{22})^{-1}) + \\ \ell_2 (4r\theta + r^{-1}\theta(k_{11}/k_{22}) + k^2 r^{-1}(k_{22})^{-1}) - \\ \ell_3 (k + 3r\theta) + \ell_4 (k - 3r\theta) ] + \\ \ell_3 [ \ell_1 (k - 3r\theta) - \ell_2 (k + 3r\theta) + \\ \ell_3 (4r\theta + r^3\theta(k_{22}/k_{11}) + k^2 r(k_{11})^{-1}) + \\ \ell_4 (2r\theta - r^3\theta(k_{22}/k_{11}) - k^2 r(k_{11})^{-1}) ] \\ + \ell_4 [ - \ell_1 (k + 3r\theta) + \ell_2 (k - 3r\theta) + \\ \ell_3 (2r\theta - r^3\theta(k_{22}/k_{11}) - k^2 r(k_{11})^{-1}) + \\ \ell_4 (4r\theta + r^3\theta(k_{22}/k_{11}) + k^2 r(k_{11})^{-1}) ] \} \\ = (\mu_E)^{-1} \{ 2r\theta [(\ell_1 + \ell_2) - (\ell_3 + \ell_4)]^2 + \\ r\theta [(\ell_1 - \ell_3)^2 + (\ell_1 - \ell_4)^2 + (\ell_2 - \ell_3)^2 + \\ (\ell_2 - \ell_4)^2] + [r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta + \\ (r^{-1}k^2)/k_{22}] (\ell_1 - \ell_2)^2 + [r^3(k_{22}/k_{11})\theta + \\ (rk^2)/k_{11}] (\ell_3 - \ell_4)^2 + \\ 2k (\ell_1 - \ell_2) (\ell_3 - \ell_4) \} = \\ & (\mu_E)^{-1} \{ 2r\theta [(\ell_1 + \ell_2) - (\ell_3 + \ell_4)]^2 + \\ r\theta [(\ell_1 - \ell_3)^2 + (\ell_1 - \ell_4)^2 + (\ell_2 - \ell_3)^2 + \\ (\ell_2 - \ell_4)^2] + [-k + r^{-1}(k_{11}/k_{22})\theta + \\ (r^{-1}k^2)/k_{22}] (\ell_1 - \ell_2)^2 + [-k + \\ r^3(k_{22}/k_{11})\theta + (rk^2)/k_{11}] (\ell_3 - \ell_4)^2 \\ + k [(\ell_1 - \ell_2) + (\ell_3 - \ell_4)]^2 \}. \end{aligned}$$

As condições dadas a seguir são suficientes para garantir que a matriz global seja definida positiva.

$$\begin{aligned} r^{-1}\theta(k_{11}/k_{22}) + k^2 r^{-1}(k_{22})^{-1} - k &\geq 0; \\ r^3\theta(k_{22}/k_{11}) + k^2 r(k_{11})^{-1} - k &\geq 0. \end{aligned}$$

Utilizando a definição de  $\theta$ , as seguintes condições são obtidas após algumas manipulações:

$$r^2(k_{11})^2 + k^2 \geq r^{-1}k(r^2 k_{22} + k_{11}); \quad (8)$$

$$r^2(k_{22})^2 + k^2 \geq r^{-1}k(r^2 k_{22} + k_{11}). \quad (9)$$

Admitindo que as condições impostas nas Eqs. (8) e (9) sejam satisfeitas, então segue que  $\ell^T A \ell \geq 0$ . Portanto,  $\ell \neq \mathbf{0} \Rightarrow \ell^T A \ell > 0$ , conforme as considerações feitas no final da subseção anterior.

## 5. Conclusão

O cálculo da velocidade de Darcy produzido com a metodologia apresentada neste trabalho não sofrerá imprecisões relativas a erros de integração numérica, pois as integrais que aparecem na Eq. (6) são resolvidas analiticamente e não são aproximadas, por exemplo, pela regra do trapézio, conforme os trabalhos [3, 4]. O método dos elementos finitos mistos e híbridos vai gerar um sistema linear, associado à equação da pressão, que possui matriz simétrica e definida positiva (se  $K$  for um tensor as condições exibidas nas Eqs. (8) e (9) são suficientes para garantir tal propriedade da matriz). Estas propriedades da matriz garantem a existência e a unicidade de solução do sistema linear, além de permitir que o método dos Gradientes Conjugados seja utilizado na resolução do mesmo.

## REFERÊNCIAS

[1] E. Abreu, Furtado F., F. Pereira, e S. Ribeiro. Central schemes for porous media flow. (*Paper to be submitted*), 2008.

[2] C. G. Almeida, Cálculo da velocidade de Darcy utilizando o método dos elementos finitos mistos e híbridos, em “Anais do 10º Encontro de Modelagem Computacional”,

CD-ROM (ISBN 978-85-85769-35-2), Nova Friburgo, novembro 2007.

[3] C. G. Almeida, J. Douglas Jr. e F. Pereira, A new characteristics-based numerical method for miscible displacement in heterogeneous formations, *Computational and Applied Mathematics*, vol. 21, fascículo 2, 573-605, (2002).

[4] J. Aquino, F. Pereira, H. P. A. Souto e A. S. Francisco. A forward tracking scheme for solving radionuclide advective problems in unsaturated porous media. *International Journal of Nuclear Energy Science and Technology*, vol. 3, n. 2, pp. 196–205, (2007).

[5] F. Brezzi e M. Fortin. Mixed and hybrid finite element methods, volume 15 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, (1991).

[6] G. Chavent e J. E. Roberts, A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite element and standard finite difference approximations for the determination of velocities in waterflow problems, *Adv. Water Resources*, vol. 14, 6, 329-348, (1991).

[7] J. Douglas Jr., F. Furtado e F. Pereira, On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs, *Computational Geosciences*, vol. 2, n.1, 155–190, (1997).

[8] L. J Durlofsky, Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media, *Water resources research*, 27 (5), 699-708, (1991).

[9] S. Ribeiro, “Novos Esquemas Centrais de Diferenças Finitas para a Simulação de Escoamentos Multifásicos em Reservatórios de Petróleo”, Tese de Doutorado, Instituto Politécnico-UERJ, Nova Friburgo, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

[10] C. A. Silva, “Um novo algoritmo, naturalmente paralelizável, para o cálculo de permeabilidades equivalentes em reservatórios”, Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico-UERJ, Nova Friburgo, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.

**Agradecimentos**

O autor gostaria de agradecer à Fapemig pelo apoio a este trabalho.