

ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO FLUX3 APLICADO À SECAGEM EM MEIO POROSO CAPILAR

Paulo Cesar Oliveira

Departamento de Engenharia Rural, CCA-UFES

29.500-000, Alegre, ES

E-mail: pacololiveira@yahoo.com.br

Marcos de S. N. Cardoso

Departamento de Engenharia Rural, CCA-UFES

29.500-000, Alegre, ES

E-mail: kvneves@gmail.com

RESUMO: Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar a aplicação de um novo esquema de discretização para volumes finitos denominado FLUX3, utilizando-se para tal, de dois casos de transporte de umidade e calor através de um meio poroso capilar. Os resultados da solução das equações de Luikov, mostram um comportamento adequado do esquema para este tipo de problema, quando comparado ao tradicional esquema de diferença central e ao método da transformada integral.

PALAVRAS-CHAVE: difusão, equações de Luikov, volumes finitos.

Figura 1. Discretização unidimensional para volumes finitos.

INTRODUÇÃO

Problemas da área térmica envolvendo o transporte de calor e massa aparecem em processos como fusão e solidificação de materiais, armazenamento e beneficiamento de grãos, movimentação de água, poluentes ou adubos em solos, exploração de campos petrolíferos, conforto ambiental em edificações, escoamentos ao redor de estruturas e dentro de máquinas térmicas, escoamentos atmosféricos e previsão de tempo. Os interesses econômicos envolvidos, junto com o desenvolvimento acelerado dos computadores digitais, motivaram o desenvolvimento dos métodos numéricos para a simulação dos mesmos.

O método de volumes finitos é utilizado por grande parte da literatura dos problemas citados acima. O presente trabalho tem como objetivo apresentar um esquema de discretização mais elaborado em relação aos atualmente utilizados pelos usuários deste método, para tratar problemas difusivos governados pelas equações descritas em LUIKOV e MIKHAILOV (1965) e LUIKOV (1966 e 1975). Tais equações, denominadas

equações de Luikov, governam a transferência simultânea de calor e massa em problemas como a secagem de madeira, cerâmica e solos, produtos agrícolas e farmacêuticos.

DERIVAÇÃO DO ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO FLUX3 PARA DIFUSÃO PURA

Dentre os esquemas de discretização usados em volumes finitos para difusão pura, o esquema de diferença central descrito no livro de PATANKAR (1980), gerado a partir da hipótese que o fluxo difusivo da variável dependente é constante entre dois pontos da discretização; ocupa um lugar de destaque na comunidade de simulação numérica, devido a sua simplicidade e bons resultados para este tipo de fenômeno. A fim de reduzir esforço computacional, VAREJÃO (1979) demonstrou que admitir uma variação linear do fluxo total da variável dependente transportada dentro de cada volume de controle, gera um perfil interpolante denominado de Flux-Spline, que produz para todos os problemas teste usados ao longo do seu trabalho, erros expressivamente menores que o esquema de diferença central

NIECKELE (1985) seguindo o caminho aberto em VAREJÃO (1979), testou esquemas de discretização utilizados pela área de térmica e fluidos, comparando-os através de problemas teste característicos, com o esquema denominado FLUX33 desenvolvido no seu trabalho, onde os fluxos, de massa e total (convecção-difusão), variam de forma cúbica ao longo de cada volume de controle. É este esquema, aqui apresentado sob outro equacionamento e por isto denominado de FLUX3.

Equação Geral de Governo em Regime Permanente

A equação diferencial que rege o transporte de uma quantidade ϕ em regime permanente é:

$$\nabla \cdot \vec{J}^\phi = S^\phi \quad (1)$$

Onde o fluxo total da variável independente ϕ é: $\vec{J}^\phi = -\Gamma^\phi \cdot \nabla \phi$ sendo S^ϕ o termo fonte. Assim (1) pode ser colocada em coordenadas cartesianas na forma:

$$\partial Jx^\phi / \partial X + \partial Jy^\phi / \partial Y + \partial Jz^\phi / \partial Z = S^\phi \quad (2)$$

O fluxo total na direção X da variável dependente ϕ é:

$$Jx^\phi = -\Gamma^\phi \times \partial \phi / \partial X \quad (3)$$

Onde Γ^ϕ é o coeficiente de difusão, propriedade do meio através do qual a variável dependente ϕ é transportada (ver esquema para o caso unidimensional na figura 1).

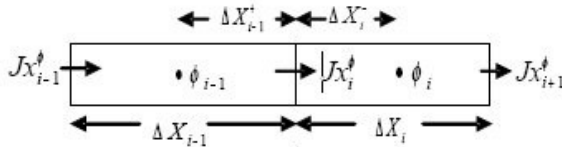


FIGURA 1. Discretização unidimensional para volumes finitos.

Assumindo que o fluxo total Jx^ϕ possa variar na direção X_i de forma cúbica, ao longo de cada volume de controle (VC). Tem-se para o VC(i):

$$Jx^\phi = Ax_i^\phi \times (\eta x_i^3 - \eta x_i^2) + Bx_i^\phi \times (\eta x_i^2 - \eta x_i) + Cx_i^\phi \times \eta x_i + Dx_i^\phi \quad (4)$$

Onde:

$$\eta x_i = X_i / \Delta X_i \quad (5)$$

$$Dx_i = Jx_i^\phi \quad (6)$$

$$Cx_i^\phi = (Jx_{i+1}^\phi - Jx_i^\phi) \quad (7)$$

$$Bx_i^\phi = (Jx_{i+1}^\phi - Jx_i^\phi) - Jx_i^\phi \times \Delta X_i \quad (8)$$

$$Ax_i^\phi = (Jx_{i+1}^\phi + Jx_i^\phi) \times \Delta X_i - 2 \times (Jx_{i+1}^\phi - Jx_i^\phi) \quad (9)$$

E para o VC(i-1):

$$Jxm_i^\phi = Axm_i^\phi \times (\eta xm_i^3 - \eta xm_i^2) + Bxm_i^\phi \times (\eta xm_i^2 - \eta xm_i) + Cxm_i^\phi \times \eta xm_i + Dxm_i^\phi \quad (10)$$

Onde:

$$\eta xm_i = Xm_i / \Delta X_{i-1} \quad (11)$$

$$Dxm_i = -Jx_i^\phi \quad (12)$$

$$Cxm_i^\phi = (Jx_i^\phi - Jx_{i-1}^\phi) \quad (13)$$

$$Bxm_i^\phi = (Jx_i^\phi - Jx_{i-1}^\phi) - Jx_i^\phi \times \Delta X_{i-1} \quad (14)$$

$$Axm_i^\phi = (Jx_{i-1}^\phi + Jx_i^\phi) \times \Delta X_{i-1} - 2 \times (Jx_i^\phi - Jx_{i-1}^\phi) \quad (15)$$

Obtém-se da igualdade entre as equações (3) e (4) para o VC(i):

$$-\Gamma_i^\phi \times \frac{d\phi}{dX_i} = Ax_i^\phi \times (\eta x_i^3 - \eta x_i^2) + Bx_i^\phi \times (\eta x_i^2 - \eta x_i) + Cx_i^\phi \times \eta x_i + Dx_i^\phi \quad (16)$$

Sendo Γ_i^ϕ constante dentro deste VC, Obtem-se de (16) o perfil interpolante do esquema de discretização para difusão pura:

$$\phi = \frac{-1.0}{\Gamma_i^\phi} \times \left[Ax_i \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{X_i^4}{\Delta X_i^3} - \frac{1}{3} \times \frac{X_i^3}{\Delta X_i^2} \right) + Bx_i \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{X_i^3}{\Delta X_i^2} - \frac{1}{2} \times \frac{X_i^2}{\Delta X_i} \right) + Cx_i \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{X_i^2}{\Delta X_i} \right) + Dx_i \times \frac{1}{1.0} \times X_i \right] + C_{vei}^\phi \quad (17)$$

Adotando-se a condição de contorno, $\phi(X_i = \Delta X_i^-) = \phi_i$, obtém-se o valor da constante de integração para o VC(i):

$$C_{vei}^\phi = \left(\frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i^\phi} \times \eta mx_i \times \frac{1/2}{1.0} \right) \times (Cx_i^\phi - \alpha x_i^\phi \times Ax_i^\phi - \beta x_i^\phi \times Bx_i^\phi) + Dx_i^\phi \times \Delta X_i^- / \Gamma_i^\phi \times 1/1.0 + \phi_i \quad (18)$$

Onde:

$$\eta mx_i = \Delta X_i^- / \Delta X_i \quad (19)$$

$$\alpha x_i^\phi = \frac{(1/3)}{(1/2)} \times \eta mx_i - \frac{(1/4)}{(1/2)} \times \eta mx_i^2 \quad (20)$$

$$\beta x_i^\phi = 1 - \frac{(1/3)}{(1/2)} \times \eta mx_i \quad (21)$$

Adotando-se o mesmo procedimento para o VC(i-1), com a condição de contorno $\phi(X_{m_i} = \Delta X_{i-1}^+) = \phi_{i-1}$, obtém-se uma equação similar à (18) onde:

$$C_{vci-1}^{\phi} = \left(\frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}^{\phi}} \times \eta px_{i-1} \times \frac{1/2}{1.0} \right) \times (Cxm_i^{\phi} - \alpha xm_i^{\phi} \times Axm_i^{\phi} - \beta xm_i^{\phi} \times Bxm_i^{\phi}) \quad (22)$$

$$+ Dxm_i^{\phi} \times \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}^{\phi}} \times 1/1.0 + \phi_{i-1}$$

Onde:

$$\eta px_{i-1} = \Delta X_{i-1}^+ / \Delta X_{i-1} \quad (23)$$

$$\alpha xm_i^{\phi} = 1 - 2 \times \frac{(1/3)}{(1/2)} \times \eta px_{i-1} + \frac{(1/4)}{(1/2)} \times \eta px_{i-1}^2 \quad (24)$$

$$\beta xm_i^{\phi} = 1 - \frac{(1/3)}{(1/2)} \times \eta px_{i-1} \quad (25)$$

As frações presentes nas expressões acima e nas subsequentes, representam o limite de funções que aparecem na dedução deste esquema para o caso geral de convecção-difusão, quando a velocidade tende a zero (difusão pura).

Condição de continuidade para a variável dependente ϕ

Na interface entre os volumes de controle i e $(i-1)$, a variável dependente possui um valor único. Ou seja:

$$\phi(X_i = 0) = \phi(Xm_i = 0) \quad (26)$$

Que equivale à:

$$C_{vci}^{\phi} = C_{vci-1}^{\phi} \quad (27)$$

Equação para os fluxos na direção X_i

Após a substituição em (27) das equações (18) e (22), obtém-se a expressão para os fluxos Jx_i^{ϕ} ao longo do domínio $2 \leq i \leq ifin + 1$, mostrado na Figura 2:

$$Jx_i^{\phi} = DJx_i^{\phi} \times (1.0 \times \phi_{i-1} - 1.0 \times \phi_i) + (Jhatx_i^{\phi} + J2hatx_i^{\phi}) \quad (28)$$

Onde:

$$DJx_i^{\phi} = \frac{1.0}{\left(\frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i^{\phi}} \times 1/1.0 + \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}^{\phi}} \times 1/1.0 \right)} \quad (29)$$

$$Jhatx_i^{\phi} = BJx_i^{\phi} \times (Jx_i^{\phi} - Jx_{i+1}^{\phi}) - CJx_i^{\phi} \times (Jx_{i-1}^{\phi} - Jx_i^{\phi}) \quad (30)$$

$$J2hatx_i^{\phi} = BJx_i^{\phi} \times (\alpha x_i^{\phi} \times Ax_i^{\phi} + \beta x_i^{\phi} \times Bx_i^{\phi}) - CJx_i^{\phi} \times (\alpha xm_i^{\phi} \times Axm_i^{\phi} + \beta xm_i^{\phi} \times Bxm_i^{\phi}) \quad (31)$$

$$BJx_i^{\phi} = DJx_i^{\phi} \times \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i^{\phi}} \times \eta mx_i \times \frac{1/2}{1.0} \quad (32)$$

$$CJx_i^{\phi} = DJx_i^{\phi} \times \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}^{\phi}} \times \eta px_{i-1} \times \frac{1/2}{1.0} \quad (33)$$

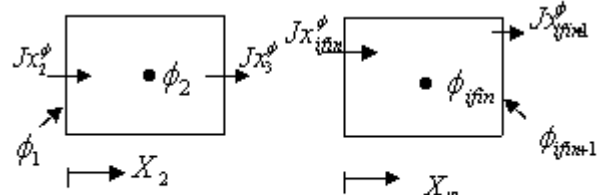


FIGURA 2. Domínio do fluxo total Jx e ϕ na direção X_i .

Fazendo-se $J2hatx_i^{\phi}$ igual a zero em (28) obtém-se os fluxos calculados no esquema FLUX-SPLINE de VAREJÃO (1979) Mantendo-se em (28) $J2hatx_i^{\phi}$ igual a zero e fazendo agora $Jhatx_i^{\phi}$ igual a zero, recupera-se então o esquema de diferença central usado em PATANKAR (1980). □

Equações para a derivada dos fluxos

As derivadas dos fluxos são obtidas por meio de imposição da continuidade da derivada segunda de Jx^{ϕ} (spline cúbico), nas interfaces dos volumes de controle ao longo de todo o domínio de cálculo. Ou seja:

$$Jx''^{\phi}(X_i = 0) = -Jxm''^{\phi}(Xm_i = 0) \quad (34)$$

$$Jx_i^{\phi} = \frac{\frac{(Jx_{i+1}^{\phi} - Jx_i^{\phi})}{\Delta X_i} + \frac{(Jx_i^{\phi} - Jx_{i-1}^{\phi})}{3}}{1 + \Delta X_i / \Delta X_{i-1}} + \frac{\frac{(Jx_i^{\phi} - Jx_{i-1}^{\phi})}{\Delta X_{i-1}} + \frac{(Jx_i^{\phi} - Jx_{i+1}^{\phi})}{3}}{1 + \Delta X_{i-1} / \Delta X_i} \quad (35)$$

Impondo esta condição para os volumes de controle da Figura 1, obtém-se a (35) quando $3 \leq i \leq ifin$ e assumindo um perfil parabólico para o fluxo Jx^{ϕ} na fronteira esquerda ($Ax_{i=2}^{\phi} = 0$, em (9)) obtém-se:

$$Jx_2^{\phi} = 2 \cdot \frac{(Jx_3^{\phi} - Jx_2^{\phi})}{\Delta X_2} - Jx_3^{\phi} \quad (36)$$

O mesmo procedimento na fronteira à direita usando (15) com $i = ifin + 1$, fornece a expressão para o cálculo da derivada do fluxo neste volume de controle.

$$Jx_{ifin+1}^{\phi} = 2 \times \frac{(Jx_{ifin+1}^{\phi} - Jx_{ifin}^{\phi})}{\Delta X_{ifin}} - Jx_{ifin}^{\phi} \quad (37)$$

O conjunto de equações deduzido é adequado para o caso unidimensional. Entretanto, em casos multidimensionais, verificou-se através de testes numéricos que, considerar os fluxos Jx constantes nas faces dos volumes de controle, como é praxe no método de volumes finitos tradicional, gera erros de ordem igual ou superior àqueles gerados pelo perfil interpolante aqui deduzido.

Assim, NIECKELE(1985) propôs que quando da integração da equação geral de governo, fosse usada como correção, a derivada dos fluxos, calculada através do perfil interpolante no ponto onde se localiza a variável dependente dentro do volume de controle. Assim obtém-se:

$$\int_{VC_{i,j,k}} \left(Jx_{\Delta X_i, Y_j, Z_k}^{\phi} + Jy_{X_i, \Delta Y_j, Z_k}^{\phi} + Jz_{X_i, Y_j, \Delta Z_k}^{\phi} \right) \times dX \times dY \times dZ =$$

$$Jx_{\Delta X_i, Y_j, Z_k}^{\phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \cdot \Delta Z_k \quad (38)$$

$$+ Jy_{X_i, \Delta Y_j, Z_k}^{\phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \cdot \Delta Z_k$$

$$+ Jz_{X_i, Y_j, \Delta Z_k}^{\phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \cdot \Delta Z_k$$

Pode-se afirmar então, que existe um fator de correção $SURF_{i,j,k}^{\phi}$, tal que quando da integração da equação de governo (2), sob o método de volumes finitos, obtém-se:

$$\left(Jx_{i+1,j,k}^{\phi} - Jx_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k + \left(Jy_{i,j+1,k}^{\phi} - Jy_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta X_i \times \Delta Z_k + \left(Jz_{i,j,k+1}^{\phi} - Jz_{i,j,k}^{\phi} \right) \cdot \Delta X_i \times \Delta Y_j$$

$$+ SURF_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k =$$

$$\left(Jx_{\Delta X_i, Y_j, Z_k}^{\phi} \right) \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k \quad (39)$$

$$+ \left(Jy_{X_i, \Delta Y_j, Z_k}^{\phi} \right) \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k$$

$$+ \left(Jz_{X_i, Y_j, \Delta Z_k}^{\phi} \right) \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k$$

Onde $SURF_{i,j,k}^{\phi}$ é a correção para este tipo de perfil interpolante, em cada um dos volumes de controle. O desenvolvimento algébrico de (39) conduz para o domínio $2 \leq i \leq ifin$ à:

$$SURF_{i,j,k}^{\phi} = \left[Ax_{i,j,k}^{\phi} \times (3 \times \eta mx_i^2 - 2 \times \eta mx_i) \right] \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k$$

$$+ \left[Bx_{i,j,k}^{\phi} \times (2 \times \eta mx_i - 1) \right] \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k$$

$$+ \left[Ay_{i,j,k}^{\phi} \times (3 \times \eta my_j^2 - 2 \times \eta my_j) \right] \times \Delta X_i \times \Delta Z_k \quad (40)$$

$$+ \left[By_{i,j,k}^{\phi} \times (2 \times \eta my_j - 1) \right] \times \Delta X_i \times \Delta Z_k$$

$$+ \left[Az_{i,j,k}^{\phi} \times (3 \times \eta mz_k^2 - 2 \times \eta mz_k) \right] \times \Delta X_i \times \Delta Y_j$$

$$+ \left[Bz_{i,j,k}^{\phi} \times (2 \times \eta mz_k - 1) \right] \times \Delta X_i \times \Delta Y_j$$

Onde de acordo com as equações (8) e (9):

$$Ax_{i,j,k}^{\phi} = \left(Jx_{i+1,j,k}^{\phi} + Jx_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta X_i - 2 \times \left(Jx_{i+1,j,k}^{\phi} - Jx_{i,j,k}^{\phi} \right) \quad (41)$$

$$Ay_{i,j,k}^{\phi} = \left(Jy_{i,j+1,k}^{\phi} + Jy_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta Y_j - 2 \times \left(Jy_{i,j+1,k}^{\phi} - Jy_{i,j,k}^{\phi} \right) \quad (42)$$

$$Az_{i,j,k}^{\phi} = \left(Jz_{i,j,k+1}^{\phi} + Jz_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta Z_k - 2 \times \left(Jz_{i,j,k+1}^{\phi} - Jz_{i,j,k}^{\phi} \right) \quad (43)$$

$$Bx_{i,j,k}^{\phi} = \left(Jx_{i+1,j,k}^{\phi} - Jx_{i,j,k}^{\phi} \right) - Jx_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta X_i \quad (44)$$

$$By_{i,j,k}^{\phi} = \left(Jy_{i,j+1,k}^{\phi} - Jy_{i,j,k}^{\phi} \right) - Jy_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta Y_j \quad (45)$$

$$Bz_{i,j,k}^{\phi} = \left(Jz_{i,j,k+1}^{\phi} - Jz_{i,j,k}^{\phi} \right) - Jz_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta Z_k \quad (46)$$

$$\eta mx_i = \Delta X_i / \Delta X_i \quad (47)$$

$$\eta my_j = \Delta Y_j / \Delta Y_j \quad (48)$$

$$\eta mz_k = \Delta Z_k / \Delta Z_k \quad (49)$$

Equação de discretização para a variável dependente ϕ

A integração da equação de governo (2) para um caso tridimensional, de acordo com o método de volumes finitos, incluindo o termo de correção, fornece:

$$\left(Jx_{i+1,j,k}^{\phi} - Jx_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k + \left(Jy_{i,j+1,k}^{\phi} - Jy_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta X_i \times \Delta Z_k + \left(Jz_{i,j,k+1}^{\phi} - Jz_{i,j,k}^{\phi} \right) \times \Delta X_i \times \Delta Y_j =$$

$$Sc_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k + Sp_{i,j,k}^{\phi} \times \phi_{i,j,k} \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k - SURF_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k \quad (50)$$

Substituindo na expressão acima, as equações para os fluxos como em (28), obtém-se para a variável dependente no domínio $2 \leq i \leq ifin$, $2 \leq j \leq jf$ e $2 \leq k \leq kf$:

$$AP_{i,j,k}^{\phi} \cdot \phi_{i,j,k} = AIM_{i,j,k}^{\phi} \cdot \phi_{i-1,j,k} + AIP_{i,j,k}^{\phi} \cdot \phi_{i+1,j,k}$$

$$+ AJM_{i,j,k}^{\phi} \cdot \phi_{i,j-1,k} + AJP_{i,j,k}^{\phi} \cdot \phi_{i,j+1,k} \quad (51)$$

$$+ AKM_{i,j,k}^{\phi} \cdot \phi_{i,j,k-1} + AKP_{i,j,k}^{\phi} \cdot \phi_{i,j,k+1} + CON_{i,j,k}^{\phi}$$

Onde:

$$AIM_{i,j,k}^{\phi} = DJx_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k \quad (52)$$

$$AIP_{i,j,k}^{\phi} = DJx_{i+1,j,k}^{\phi} \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k \quad (53)$$

$$AJM_{i,j,k}^{\phi} = DJy_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Z_k \quad (54)$$

$$AJP_{i,j,k}^{\phi} = DJy_{i,j+1,k}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Z_k \quad (55)$$

$$AKM_{i,j,k}^{\phi} = DJz_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \quad (56)$$

$$AKP_{i,j,k}^{\phi} = DJz_{i,j,k+1}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \quad (57)$$

$$AP_{i,j,k}^{\phi} = AIM_{i,j,k}^{\phi} + AIP_{i,j,k}^{\phi} + AJM_{i,j,k}^{\phi} + AJP_{i,j,k}^{\phi} + AKM_{i,j,k}^{\phi} + AKP_{i,j,k}^{\phi} - Sp_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k \quad (58)$$

$$CON_{i,j,k}^{\phi} = Sc_{i,j,k}^{\phi} \times \Delta V - (DIVhat_{i,j,k}^{\phi} + DIV2hat_{i,j,k}^{\phi} + SURF_{i,j,k}^{\phi} \cdot \Delta V) \quad (58)$$

Onde;

$$\Delta V = \Delta X_i \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k \quad (59)$$

$$DIVhat_{i,j,k}^{\phi} = (Jhatx_{i+1,j,k}^{\phi} - Jhatx_{i,j,k}^{\phi}) \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k + (Jhaty_{i,j+1,k}^{\phi} - Jhaty_{i,j,k}^{\phi}) \times \Delta X_i \times \Delta Z_k \quad (60)$$

$$DIV2hat_{i,j,k}^{\phi} = (J2hatx_{i+1,j,k}^{\phi} - J2hatx_{i,j,k}^{\phi}) \times \Delta Y_j \times \Delta Z_k + (J2haty_{i,j+1,k}^{\phi} - J2haty_{i,j,k}^{\phi}) \times \Delta X_i \times \Delta Z_k + (J2hatz_{i,j,k+1}^{\phi} - J2hatz_{i,j,k}^{\phi}) \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \quad (61)$$

Note que sob esse formato, um código computacional pode facilmente fornecer resultados para os três esquemas, Diferença Central, FLUX-SPLINE e FLUX3, bastando para isto incluir ou omitir os termos fonte adicionais característicos.

Método de solução para caso geral

A matriz resultante de $\phi_{i,j,k}$ é resolvida através do esquema ADI, com o método Line-by-Lyne (PATANKAR, 1980). No caso de condições de contorno de segunda e/ou terceira espécie, deve-se corrigir os valores de $\phi_{i,j,k}$ nas fronteiras usando (18) e (22). O método de solução é sequencial e iterativo tanto para os fluxos e suas derivadas como para a variável dependente $\phi_{i,j,k}$ e dessa forma, similar ao adotado por PATANKAR (1980). Maiores detalhes podem ser encontrados em OLIVEIRA (1999).

RESULTADOS

O esquema anteriormente descrito, será aplicado a problemas transientes uni e bidimensionais. As expressões para a discretização são obtidas suprimindo-se a direção Z.

As equações de LUIKOV (1965) adimensionalizadas, para problemas de secagem em corpos porosos capilares, sob condições de pressão constante, de acordo com RIBEIRO *et al* (1993), são:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \alpha \times \nabla^2 \theta_1 = -\beta \times \nabla^2 \theta_2 \quad (62)$$

$$\alpha = 1 + \varepsilon \times Ko \times Lu \times Pn$$

$$\beta = \varepsilon \times Ko \times Lu$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - Lu \times \nabla^2 \theta_2 = -Lu \times Pn \times \nabla^2 \theta_1 \quad (63)$$

Onde os parâmetros adimensionais envolvidos α , β , Lu , Ko e Pn são definidos em RIBEIRO *et al* (1993). A discretização do termo transiente é feita usando diferença finita de primeira ordem e as equações geradas são totalmente implícitas no tempo como proposto por PATANKAR (1980). θ_1 é a temperatura adimensional, θ_2 é a umidade adimensional, X a coordenada espacial adimensional e τ o tempo adimensional. A malha espacial utilizada nos dois casos será de 20 volumes de controle em cada direção coordenada, com uma malha de 50 passos ao longo do tempo.

Problema teste 1

Consiste numa placa porosa úmida de espessura unitária, exposta ao ar seco, que sofre a ação de secagem devido à um fluxo de calor em sua face inferior como mostrado na Figura 3. Os coeficientes das equações de transporte são constantes.

A condição inicial para a temperatura e umidade é descrita por:

$$\theta_1(X, \tau = 0) = \theta_2(X, \tau = 0) = 0 \quad (64)$$

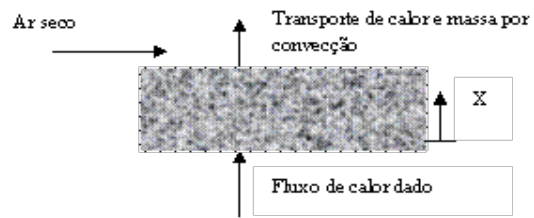


FIGURA 3. Geometria e sistema de coordenadas para secagem em placa porosa úmida

Para $\tau > 0$ as condições de contorno são:

$$\frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial X} = -Q \quad (65)$$

$$\frac{\partial \theta_2(0, \tau)}{\partial X} - Pn \cdot \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (66)$$

para $X=1$;

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1}{\partial X} - Bi_q \times [1 - \theta_1] + (1 - \varepsilon) \\ \times Ko \times Lu \times Bi_m \times [1 - \theta_2] \end{array} \right] = 0 \quad (67)$$

$$\text{para } X=1; \quad (68)$$

$$-\frac{\partial \theta_2}{\partial X} + Pn \times \frac{\partial \theta_1}{\partial X} + Bi_m \times [1 - \theta_2] = 0$$

Bi_q é o coeficiente de transferência de calor adimensional, Bi_m o coeficiente de transferência de massa adimensional e Q o fluxo de calor adimensional em X igual a zero. Os valores dos parâmetros adimensionais usados foram $Lu = 0,4$, $Ko = 5,0$, $Pn = 0,6$, $Bi_q = Bi_m = 2,5$, $\varepsilon = 0,2$ e $Q = 0,9$ (RIBEIRO *et al* 1993).

Os resultados para temperatura e umidade como funções do tempo e posição ao longo de X, estão plotados nas Figuras 4 e 5 com linhas cheias em comparação aos resultados de referência obtidos por RIBEIRO *et al* (1993), através de um método de alta precisão chamado método da transformada integral. Pode-se notar a excelente concordância entre o esquema proposto expresso na linha descontinua e a solução de referência.

Problema teste 2

Foi proposto por RIBEIRO e LOBO (1998), e consiste numa placa porosa bidimensional de dimensões unitárias com coeficientes constantes, sob as condições inicial e de contorno abaixo. Os valores dos parâmetros adimensionais são $Lu = 0,4$, $Ko = 3,0$, $Pn = 1,0$ e $\varepsilon = 0,2$.

As condições iniciais são:

$$\theta_1(X, Y, \tau = 0) = \theta_2(X, Y, \tau = 0) = 0 \quad (69)$$

Para $\tau > 0$ as condições de contorno são:

$$\frac{\partial \theta_1(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial \theta_1(X, 0, \tau)}{\partial Y} = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial \theta_2(0, Y, \tau)}{\partial X} - Pn \times \frac{\partial \theta_1(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial \theta_2(X, 0, \tau)}{\partial Y} - Pn \cdot \frac{\partial \theta_1(X, 0, \tau)}{\partial Y} = 0 \quad (73)$$

$$\theta_1(1, Y, \tau) = \theta_2(1, Y, \tau) = 1,0 \quad (74)$$

$$\theta_1(X, 1, \tau) = \theta_2(X, 1, \tau) = 1,0 \quad (74)$$

As Figuras 6 e 7 mostram os resultados para temperatura e umidade para a parede sul da placa, em comparação com uma solução de referência obtida usando-se o tradicional esquema de diferença central com uma malha de 80x80 volumes de controle. As curvas são coincidentes o que atesta a precisão do

esquema para este tipo de problema utilizando apenas 20x20 volumes de controle.

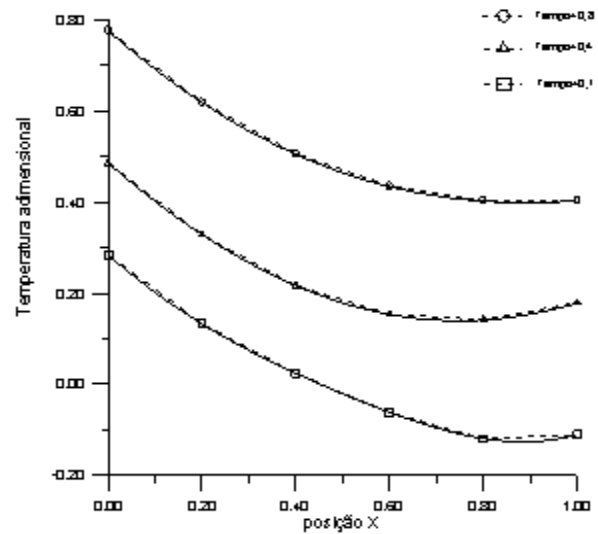


Figura 4. Distribuição de temperatura.

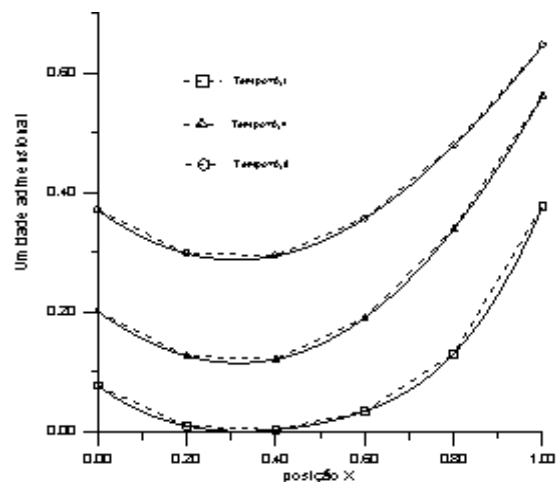


Figura 5. Distribuição de umidade.

CONCLUSÕES

O esquema FLUX3 mostrou resultados adequados de precisão para o caso de difusão pura em meio poroso capilar governado pelas equações de Luikov. As expressões resultantes da discretização foram conduzidas para que o esquema, pudesse ser visto como uma extensão dos esquemas FLUX-SPLINE (VAREJÃO, 1979) e a tradicional Diferença Central, para o método de volumes finitos. Assim, este esquema poderá ser facilmente acrescentado a códigos computacionais já existentes, pois as modificações se resumem à adição de um novo termo fonte. Sua extensão para problemas envolvendo convecção pode ser obtida seguindo-se os mesmos passos aqui descritos.

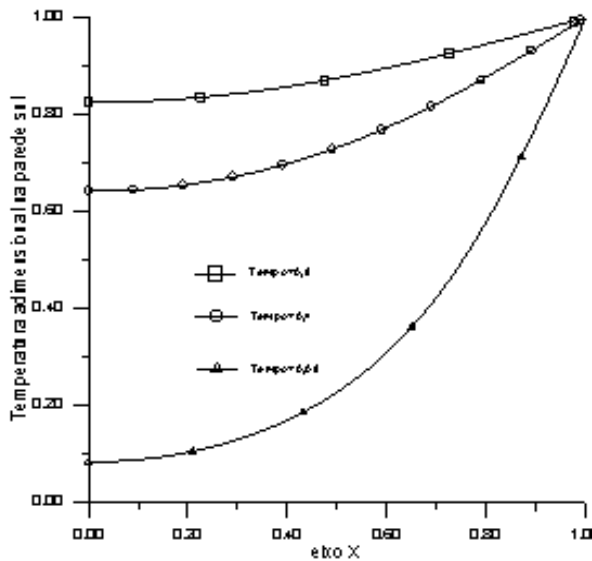


Figura 6. Temperatura em $Y=0$.

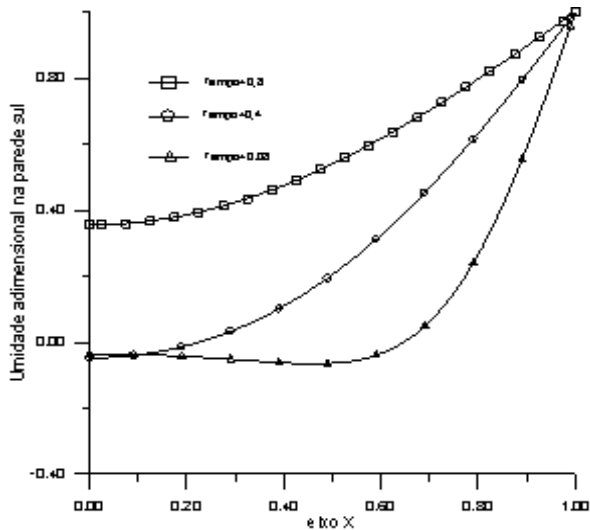


FIGURA 7. Umidade em $Y=0$.

Os resultados mostrados pelos gráficos atestam o bom desempenho do esquema FLUX3 em relação ao método da transformada integral no caso unidimensional. Para o caso bidimensional, novamente os gráficos correspondentes, mostram que tal comportamento se repete com relação ao esquema de diferença central. Assim, casos de sistemas de equações difusivas acopladas, onde a presença de termos fontes constituídos por fluxos, introduzem uma dificuldade a mais para o tradicional esquema de diferença central, podem ser adequadamente tratados pelo esquema aqui proposto, com malhas constituídas por um menor número de volumes de controle diminuindo desta forma o esforço computacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A.V. Luikov, A.Y. Mikhailov, Theory of energy and mass transfer, Pergamon Press, Oxford, 1965.

A.V. Luikov, Heat and mass transfer in capillary porous bodies, Pergamon Press, Oxford, 1966.

A.V. Luikov, Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies (Review). Int. Journal of Heat and Mass transfer, v18, pp. 1-14, (1975).

A.O. Nieckele, Development and evaluation of numerical schemes for the solution of convection-diffusion equations, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1985.

P.C. Oliveira, Esquema FLUX-SPLINE aplicado em cavidades abertas com convecção natural, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1997.

P.C. Oliveira, Esquema FLUX-SPLINE aplicado a problemas difusivos tridimensionais em regime permanente. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, v3, n.3 pp. 327-330, (1999).

S.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

J.W. Ribeiro, R.M. Cotta, M.D. MIKHAILOV, Integral transform solution of Luikov's equations for heat and mass transfer in capillary porous media. Int. Journal of Heat and Mass transfer, v36, n18, pp. 4467-4475, (1993).

J.W. Ribeiro, P.D.C. Lobo, Drying in capillary porous media. The integral transform method in thermal and fluids science and engineering, Begell House, Inc. New York, Wellington, Cap.7, 1998.

L.M.C. Varejão, FLUX-SPLINE method for heat, mass and momentum transfer, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1979.