Introdução à Matemática Financeira Intervalar: Análise Intervalar de Investimentos

Gabriella do Carmo Pantoja Duarte
Depto de Informática e Matemática Aplicada, CCET, UFRN
59072-970, Natal, RN
E-mail: gabriellapantoja@yahoo.com.br

Benjamin René Callejas Bedregal
Depto de Informática e Matemática Aplicada, CCET, UFRN
59072-970, Natal, RN
E-mail: bedregal@dimap.ufrn.br

Resumo: *o seguinte trabalho apresenta um estudo de como aplicar os conceitos da matemática intervalar, uma teoria cujo foco é o tratamento de imprecisões, a alguns conceitos de análise de investimento da matemática financeira tradicional. Aborda as razões pelas quais a matemática intervalar é considerada tão importante, bem como suas características e definições, além de mostrar como sua aderência aos conceitos financeiros pode servir para o aprimoramento de resultados empresariais.*

Abstract: *this paper presents a study of how to apply the concepts of interval mathematics, a theory whose focus is the treatment of inaccuracies, to some concepts of investment analysis of traditional financial mathematics. It shows the reasons why the interval mathematics is considered so important, as well as its characteristics and definitions. Also, shows how it can serve for the improvement of business results.*

1 Introdução

O sucesso de um processo de tomada de decisão consiste na capacidade de antecipar os acontecimentos futuros. Tal processo reflete a essência da dinâmica empresarial, na qual o êxito de qualquer negócio depende da qualidade das decisões tomadas por seus administradores. Contudo, esse processo decisório assume certas complexidades e riscos, visto que vigora em um ambiente de incertezas. Desequilíbrios nas taxas de juros, competitividade acirrada, desajustes de mercado, dentre outros fatores exigem uma maior capacidade analítica das unidades decisórias com relação aos riscos que corre uma empresa.

Tem-se a matemática financeira como um forte auxílio na maximização e qualificação de resultados empresariais. No entanto, apurar de modo exato e, conseqüentemente, seguro os custos de uma empresa torna-se uma tarefa difícil, devido à imprecisão e variabilidade dos fatores necessários para tal. Tradicionalmente, a incerteza na economia e nas finanças é descrita por modelos estatísticos. Todavia, em muitos casos seria mais viável obter uma solução contida em um intervalo, uma vez que nem sempre é possível se ter conhecimento do valor exato com o qual se deve trabalhar. Assim, uma solução seria aplicar os conceitos da matemática intervalar, uma teoria cujo foco é o tratamento de imprecisões, aos conceitos da matemática financeira, ferramenta imprescindível na análise de gestão empresarial.

2 Matemática Intervalar

A matemática intervalar surgiu no final da década de 50 com Ramon E. Moore [5] visando dar suporte a problemas que lidam com a incerteza. Os números representados como intervalos servem como controladores da propagação do erro, já que garantem que a resposta correta de determinado problema pertença ao intervalo obtido como solução.

O sistema de ponto flutuante dos computadores atuais não é capaz de representar exatamente os números reais, tampouco os resultados de operações com tais números. Esse tipo de representação apresenta diversas desvantagens, dentre elas [4]:

a. Ausência de controle de erros nas computações numéricas. Isto é, o procedimento é realizado corretamente, porém o resultado perde o significado em virtude da inexatidão da representação numérica e de arredondamentos e/ou truncamentos aplicados nas operações;

b. Ausência de métodos responsáveis por julgar a qualidade dos resultados gerados;

c. A variedade de sistemas existentes em ponto flutuante disponível no mercado, o que acarreta o fato de que cálculos efetuados em máquinas distintas proporcionam resultados distintos.

O *Míssil Patriot* em 1991 e a explosão do foguete *Ariane5* em 1996 são exemplos de problemas de representação. Tais catástrofes são resultados da limitação da máquina em não conseguir tratar os números em toda sua extensão. Com isso, o uso da matemática intervalar torna-se uma forte alternativa na resolução de problemas caracterizados pela falta de exatidão.

2.1 Definições Básicas da Matemática Intervalar

2.1.1 Intervalo de Números Reais

Um intervalo de reais é uma representação da forma A = [a; b], em que a e $b \in$ R, e tal que $a \leq b$. Logo, o conjunto $\{x \in \text{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$ é **um intervalo de números reais**.

$$A = [a; b] = \{x \in \text{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$$

Sabendo-se que um intervalo é representado por um par de elementos em que o primeiro elemento do par representa o limite inferior e o segundo o limite superior, quando esses dois extremos são iguais, o intervalo é dito **degenerado**. Dessa forma, o intervalo [2; 2] apenas representa o número real 2, já que o único elemento desse intervalo é o próprio número 2.

2.1.2 Conjunto IR

Define-se o **conjunto IR** como sendo o conjunto de todos os intervalos reais, ou seja:

$$\text{IR} = \{[a; b] \,/\, a, b \in \text{R}, a \leq b\}$$

2.2 Operações Aritméticas em IR

Sejam A = [a_1; a_2] e B = [b_1; b_2] $\in$ IR, as operações aritméticas com intervalos são executadas sobre os extremos de seus intervalos. Assim, as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão em IR são definidas por: $A \oplus B = \{a \oplus b / a \in A \wedge b \in B\}$, em que $\oplus \in \{+, -, /, *\}$. No caso da divisão, assume-se que $0 \notin$ B para que a operação seja bem definida.

Assim, as operações entre os intervalos A e B são dadas a seguir:

$$A + B = [(a_1 + b_1); (a_2 + b_2)]$$

$$A - B = [(a_1 - b_2); (a_2 - b_1)]$$

$$A * B = [min(a_1*b_1,\ a_1*b_2, a_2*b_1, a_2*b_2); \\ max(a_1*b_1,\ a_1*b_2, a_2*b_1, , a_2*b_2)]$$

$$\frac{A}{B} = \left[min\left(\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right); max\left(\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right)\right],$$

com $0 \notin [b_1; b_2]$.

2.3 Função Intervalar

Seja f: X → Y uma função.
X → F(X)

Se X = Dom(f) $\subseteq$ IR e Y = CD(f) $\subseteq$ IR, então diz-se que f é uma **função intervalar** de uma variável intervalar.

2.3.1 Função Potência Intervalar

Seja um intervalo de números reais A $\in$ IR, em que A = [a; b], define-se a função potência intervalar de A como sendo: $A^n = \{ x^n / x \in A\}$.E é dada por [6]:

F: IR → IR
A → F(A) , em que:

$$F(A) = A^n = \begin{cases} [0; max(|a|, |b|)^n], \text{ se } n \text{ é par e } 0 \in A \\ [b^n; a^n], \text{ se } n \text{ é par e } b < 0 \\ [a^n; b^n], \text{ senão.} \end{cases}$$

2.3.2 Inclusão Monotônica

A **inclusão monotônica** é definida do seguinte modo [7]: sejam A e B dois intervalos de números reais $\in$ IR, se A $\subseteq$ B, então F(A) $\subseteq$ F(B). Tal propriedade admite que quanto menor for o erro nos dados de entrada, menor será o erro do intervalo resultante.

2.3.3 Representação Intervalar

A **representação intervalar** (ou corretude) é definida da seguinte maneira [7]: uma função intervalar F é correta com respeito a uma função real f se satisfaz a seguinte propriedade:
$x \in [a; b] \Rightarrow f(x) \in F([a; b])$.

2.3.3.1 Representação Canônica Intervalar

Enquanto que a representação intervalar diz respeito à corretude, a representação canônica intervalar (*CIR*), além da corretude, diz respeito à otimalidade, visto que sempre retorna o melhor intervalo contendo a imagem de f.

Teorema 2.3.3.1.1 [7]: Seja f: R $\rightarrow$ R uma função real. Se f é uma função real não-assintótica, então a função intervalar:

$$CIR(f)([a; b]) = [min\ f([a; b]);\ max\ f([a; b])]$$

é bem definida e é chamada **representação canônica intervalar** para f.

obs.: Uma função é dita assintótica se para qualquer intervalo $[a; b]$, o conjunto $\{f(x) \ / \ a \leq x \leq b\}$ ou não tem *supremum* ou não tem *infimum.*

3 Matemática Financeira: Análise de Investimentos

Diariamente, diretores, gestores e controladores têm a tarefa de tomar decisões a respeito de aspectos relacionados à empresa que dirigem. É imprescindível que uma tomada de decisão empresarial passe previamente por uma análise econômica, a qual deve ser idônea de definir, entre vários projetos, o mais rentável. Assim, a análise de investimentos visa permitir que o administrador financeiro tome a decisão que maximize a riqueza do investidor, considerando a vida útil do projeto envolvido.

Alguns métodos são utilizados para que seja feita essa análise de investimentos, sendo os mais utilizados o *Valor Presente Líquido* (*VPL*) e a *Taxa Interna de Retorno* (*TIR*).

3.1 Valor Presente Líquido

O método do **Valor Presente Líquido** (*VPL*) é obtido através da diferença entre o valor presente dos benefícios (ou pagamentos) previstos de caixa e o valor presente do fluxo de caixa inicial (investimento). O cálculo do *VPL* é expresso da seguinte forma [1]:

$$VPL = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{FC_j}{(1+i)^j} \right) - FC_0$$

em que FC_j representa o valor de entrada de caixa previsto para cada intervalo de tempo e FC_0 é o investimento inicial do projeto.

Quando o valor do *VPL* for positivo, significa que o investimento é viável, ao contrário do que ocorre quando ele for negativo. Caso o valor do *VPL* seja nulo, o investimento é considerado indiferente.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando um investimento no valor de R$750.000,00 do qual se esperam benefícios anuais de caixa de R$250.000,00 no primeiro ano, R$320.000,00 no segundo ano e R$380.000,00 no terceiro ano. A empresa definiu que a taxa de desconto a ser aplicada aos fluxos de caixa do investimento é de 20%. Assim,* i = 0,2 e FC_0 = R$750.000,00.

$$VPL = \left[\frac{250.000}{(1,2)^1} + \frac{320.000}{(1,2)^2} + \frac{380.000}{(1,2)^3} \right] - 750.000$$

VPL = - 99.537,05

Como o valor do *VPL* é negativo, o investimento é considerado inviável.

3.2 Taxa Interna de Retorno

A **Taxa Interna de Retorno** (*TIR*) é a taxa de juros que iguala, em determinado momento do tempo, o valor presente das entradas com o das saídas previstas de caixa [1]. A *TIR* pode ser calculada através da seguinte expressão [1]:

$$FC_0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{FC_j}{(1+i)^j} \right)$$

em que FC_0 é o valor do investimento inicial, FC_j são fluxos previstos de entradas de caixa em cada período de tempo e *i* representa a *TIR*.

A *Taxa Interna de Retorno* de um investimento pode ser comparada com a *Taxa Mínima de Atratividade* (*TMA*). Assim, quando o valor da *TIR* for superior ao da *TMA*, o investimento é viável, ao contrário do que ocorre se a *TMA* for superior. Caso o valor da *TIR* seja igual ao da *TMA*, o investimento é indiferente.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando um investimento de R$70.000,00 com expectativa de benefícios de caixa de R$20.000,00 no primeiro ano, R$40.000,00 no segundo ano, R$45.000,00 no terceiro ano e R$30.000,00 no quarto ano. Para apurar a Taxa Interna de Retorno:*

FC_0 = R$70.000,00

$$70.000 = \frac{20.000}{(1+i)^1} + \frac{40.000}{(1+i)^2} + \frac{45.000}{(1+i)^3} + \frac{30.000}{(1+i)^4}$$

Efetuando esse cálculo, apura-se uma *TIR* de 30% ao ano. Logo, ao se descontarem os fluxos previstos de caixa pela *TIR* calculada, o valor atualizado será exatamente igual ao montante do investimento de R$70.000,00.

3.3 Dificuldades na Análise de Investimentos

A principal dificuldade na análise de investimentos é a obtenção de dados confiáveis, principalmente as projeções de fluxo de caixa. Estas se originam, basicamente, de estimativas. Logo, a precisão nunca chega a ser máxima e uma análise, para ser eficaz, deve estar fundamentada em projeções corretas. Como essas decisões estão fundamentalmente voltadas para o futuro, a incerteza torna-se um dos mais significativos aspectos do estudo das operações do mercado financeiro e das finanças corporativas.

Os métodos de análise de investimentos vistos anteriormente são comumente enriquecidos com algumas técnicas mais sofisticadas, como árvores de decisão [2], análise de Monte Carlo [2], análise de sensibilidade [2], método de Hertz [3], método de Hillier [3], regra de Hurwicz [2], dentre outras. No presente trabalho, no entanto, serão utilizados os conceitos intervalares para lidar com o risco e a incerteza relacionados com os dados de projetos empresariais.

A principal vantagem de se utilizar este método em relação aos demais é que o resultado obtido na forma de um intervalo conterá, seguramente, a solução real. Destarte, a tomada de decisão pode ocorrer de forma mais segura, visto que o risco é conhecido quando se tem a ciência do melhor e do pior caso.

4 Análise Intervalar de Investimentos

4.1 Metodologia

Utilizando-se a matemática intervalar a fim de se maximizar a qualidade dos resultados empresariais, tem-se que uma variável cuja determinação não possa ser feita de modo preciso irá ser representada por um intervalo, no qual ela ocorra com determinada margem de segurança. Por sua vez, variáveis portadoras de valores pontuais terão seus valores transformados em intervalos degenerados.

Outra observação é que para os intervalos obtidos será considerada uma precisão de duas casas decimais, uma vez que se está lidando com valores monetários. Para isso, será usado **arredondamento direcionado** a fim de que se garanta a corretude do intervalo, ou seja, a obtenção do melhor intervalo possível em termos de extensão, o qual, seguramente, contenha a solução real. Nesse tipo de arredondamento, dado um intervalo [*a*; *b*], o limite inferior do intervalo é arredondado para o maior número representável menor do que *a*. Em contraste, o limite superior é arredondado para o maior número representável maior do que *b*.

É, também, imprescindível mencionar que as fórmulas do *VPL e TIR* intervalares sempre emitirão o melhor intervalo possível, em termos de corretude e otimalidade, visto que retornarão a representação canônica intervalar (*CIR*) da função. Assim, será obtido como resultado um intervalo com a menor extensão possível, o qual contém, seguramente, o valor real do *VPL* ou da *TIR*, dependendo do caso.

4.2 Métodos de Análise Intervalar de Investimentos

4.2.1 Valor Presente Líquido Intervalar

No *VPL*, a determinação de fluxos de caixa futuros compreende uma das grandes dificuldades na análise de investimentos, visto que são embasados em estimativas e especulações. Dessa forma, fluxos de caixa futuros serão tratados como intervalos. As demais variáveis que constituem o cálculo do *VPL*: taxa de retorno, investimento inicial e períodos, serão tidas, no exemplo, como pontuais. A fórmula do *VPL Intervalar* é dada a seguir:

$$\boldsymbol{VPLI}=\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC_j}}{(1+\bar{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC_l}}{(1+\underline{I})^l}\right)-\bar{I_0};\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC_j}}{(1+\underline{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC_l}}{(1+\bar{I})^l}\right)-\underline{I_0}\right]$$

em que $\underline{EC_j}$ e $\overline{EC_j}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*; $\underline{SC_l}$ e $\overline{SC_l}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente às saídas de caixa no período *l*; $\underline{I}$ e $\bar{I}$ representam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do intervalo correspondente à taxa de retorno e $\underline{I_0}$ e $\bar{I_0}$ representam os extremos do intervalo equivalente ao investimento inicial.

A fórmula do *VPL Intervalar* foi obtida a partir da aplicação dos conceitos intervalares à fórmula do *VPL Tradicional*, de modo que o cálculo do intervalo foi organizado para que os limites inferior e superior sejam o menor e o maior possível, respectivamente. Por exemplo, no cálculo do primeiro somatório do limite inferior, utiliza-se o menor valor de entrada de caixa e o maior valor da taxa de retorno, visto que o resultado da divisão deve ser o menor possível. Todavia, isso só ocorre se ambos, divisor e dividendo, forem positivos. No segundo somatório, como a saída de caixa constitui um número negativo, deve-se obter o menor valor de taxa de retorno para que se chegue ao menor resultado possível, o qual será negativo.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando uma proposta de projeto, cujas informações estão descritas a seguir:*

Projeto	**A**
I_0 (R$)	150.000,00
Anos	**Fluxos Esperados de Caixa (A) em R$**
1	[75.000,00; 81.100,00]
2	[67.000,00; 71.000,00]
3	[-6.000,00; -5.500,00]

Tabela 1: exemplo *VPL Intervalar*

A taxa de desconto mínima aceitável é de 20%, representada pelo intervalo degenerado [0,2; 0,2]. Dessa forma, o cálculo do *VPL Intervalar* do projeto A é dado da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{VPLI_A}=\left(\frac{\overbrace{[75.000;\ 81.100]}^{EC_1}}{([1;1]+[0,2;0,2])^1}+\frac{\overbrace{[67.000;\ 71.000]}^{EC_2}}{([1;1]+[0,2;0,2])^2}+\frac{\overbrace{[-6.000;\ -5.500]}^{SC_1}}{([1;1]+[0,2;0,2])^3}\right)-\overbrace{[150.000;150.000]}^{\text{Invest. Inicial}}$$

Dessa fórmula, obtém-se:

$$\mathrm{VPLI}_A=\left(\frac{[75.000;81.100]}{[1,2;1,2]}+\frac{[67.000;71.000]}{[1,44;1,44]}+\frac{[-6.000;-5.500]}{[1,728;1,728]}\right)-[150.000;150.000]$$

1º) Limite inferior do intervalo ($\underline{VPLI}_A$):

$$\underline{VPLI}_A=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC_j}}{(1+\bar{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC_l}}{(1+\underline{I})^l}\right)-\bar{I_0}$$

$$\underline{VPLI}_A=\left(\frac{75.000}{1,20}+\frac{67.000}{1,44}+\frac{(-6.000)}{1,728}\right)-150.000$$

$$\underline{VPLI}_A=-44.444,45$$

2º) Limite superior do intervalo ($\overline{VPLI}_A$):

$$\overline{VPLI}_A=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC_j}}{(1+\underline{I})^j}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC_l}}{(1+\bar{I})^l}\right)-\underline{I_0}$$

$$\overline{VPLI}\,A = \left(\frac{81.100}{1,20} + \frac{71.000}{1,44} + \frac{(\text{-}5.500)}{1,728}\right) - 150.000$$

$$\overline{VPLI}\,A = \text{-}36.293,99$$

Assim, o *VPL Intervalar* do projeto A é dado pelo intervalo [-44.444,45; -36.293,99]. Como no intervalo obtido os dois extremos são menores que zero, tem-se que o investimento não é economicamente atrativo. De outra forma, quando se obtém um intervalo cujos limites inferior e superior estão acima de zero, o investimento é considerado viável. Nesses dois casos, não se sabe com exatidão quanto é o valor do *VPL*, mas sim um intervalo no qual ele seguramente se encontra.

Além dos dois casos descritos, há a situação em que o intervalo pode apresentar limite inferior negativo e limite superior positivo. Como, por exemplo, em [-1.000,00; 5.000,00]. Nesse caso, além de não se ter certeza do valor real do *VPL*, mas apenas um intervalo em que este se encontra, também não haverá certeza se o investimento será viável ou não. Logo, cabe ao investidor analisar as conseqüências do resultado de acordo com a sua situação. Por exemplo, se o investimento aparentar ser promissor e a perda de R$1.000,00 não implicar forte prejuízo, o investidor pode optar por correr o risco ou, caso contrário, decidir não investir. Todavia, é importante mencionar que no caso descrito o método não garantirá nem sucesso, nem insucesso. Essa talvez seja a principal desvantagem da aplicação da matemática intervalar na análise de investimentos. Uma solução seria, portanto, a aplicação de outro método capaz de apresentar um resultado menos vago.

4.2.2 Taxa Interna de Retorno Intervalar

Assim como ocorre no *VPL*, os fluxos de caixa futuros são obtidos através de estimativas, não podendo ser afirmados com total precisão. Dessa forma, estes serão tratados como intervalos, ao passo que as demais variáveis do cálculo da *TIR*: investimento inicial e períodos de tempo, serão tidas, no exemplo, como valores pontuais.

A fórmula da *TIR Intervalar* foi obtida aplicando-se os conceitos intervalares à fórmula da *TIR Tradicional*:

$$[\underline{I_0};\overline{I_0}] = \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC_j}}{(1+i_1)^j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC_l}}{(1+i_1)^l}\right);\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{EC_j}}{(1+i_2)^j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\overline{SC_l}}{(1+i_2)^l}\right)\right]$$

em que $\underline{I_0}$ e $\overline{I_0}$ representam os extremos do intervalo equivalente ao investimento inicial, $\underline{EC_j}$ e $\overline{EC_j}$ representam os extremos do intervalo correspondente às entradas de caixa no período *j*; $\underline{SC_l}$ e $\overline{SC_l}$ representam os extremos do intervalo correspondente às saídas de caixa no período *l*; i_1 e i_2 representam os extremos do intervalo correspondente à *Taxa Interna de Retorno*.

Exemplo: *Uma empresa está avaliando uma proposta de projeto, cujas informações estão descritas a seguir:*

Projeto	**A**
I_0 (R$)	5.400,00
Anos	**Entradas Esperadas de Caixa (A) em R$**
1	[10.050,00; 10.700,00]
2	[-4.000,00; -3.600,00]

Tabela 2: exemplo *TIR Intervalar*

Dessa forma, o cálculo da *TIR Intervalar* do projeto A é dado da seguinte maneira:

$$\underbrace{[5.400;5.400]}_{\text{Invest. Inicial}} = \left(\frac{\overbrace{[10.050;10.700]}^{EC_1}}{([1;1]+[i_1;i_2])^1} + \frac{\overbrace{[-4.000;-3.600]}^{SC_1}}{([1;1]+[i_1;i_2])^2}\right)$$

1º) Cálculo do limite inferior i_1:

$$\underline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\underline{EC_j}}{(1+i_1)^j} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\underline{SC_l}}{(1+i_1)^l}\right)$$

$$5.400 = \left(\frac{10.050}{(1+i_1)^1} + \frac{(\text{-}4.000)}{(1+i_1)^2}\right)$$

$$i_1 = \frac{-7,5 \pm \sqrt{(7,5)^2 - 4*54*(-6,5)}}{2*54} = 0,2843816$$

2º) Cálculo do limite superior i_2:

$$\overline{I_0} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{EC_j}}{(1+i_2)^j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\overline{SC_l}}{(1+i_2)^l} \right)$$

$$5.400 = \left(\frac{10.700}{(1+i_2)^1} + \frac{(-3.600)}{(1+i_2)^2} \right)$$

$$i_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4*54*(-17)}}{2*54} = 0{,}5519007$$

Desse modo, a *TIR Intervalar* do projeto A é o intervalo [0,2843816; 0,5519007]. Utilizando arredondamento direcionado com precisão de duas casas decimais, tem-se o novo intervalo [0,28; 0,56]. Isso significa dizer que o valor real da *TIR* estará, provavelmente, de acordo com as estimativas realizadas, dentro do intervalo obtido como solução.

5 Conclusão

Na matemática financeira atual são usadas técnicas de estatística para que seja minimizada a incerteza de dados empresariais. Entretanto, apesar de existir tal subsídio, decisões errôneas ainda são tomadas constantemente. A qualidade das informações é a diretriz para a qualidade da decisão. Dados errados, desatualizados ou mal interpretados acarretam escolhas equivocadas.

Além disso, nem sempre é possível saber o valor exato com o qual se deva trabalhar. Nesse caso, aproximações podem levar a resultados desastrosos e implicar uma decisão errônea. Assim, em muitos casos é mais viável obter uma solução contida em um intervalo, como foi visto no caso do *VPL Intervalar* e da *TIR Intervalar*.

De acordo com [8], tratar custos imprecisos através de intervalos não torna o resultado final do custo mais exato, mas permite conhecer o tamanho da incerteza. Essa informação certamente será útil para que o gestor da empresa tome suas decisões com um maior embasamento, o que se poderá traduzir em melhores decisões para a empresa.

Ao utilizar os custos como intervalos, após serem feitas as operações tem-se a garantia de que o valor real estará dentro do intervalo dado como solução. Dessa forma, a tomada de decisão pode ser considerada mais segura, pois o risco que se está correndo é conhecido, uma vez que se têm o melhor e o pior caso.

Ainda, a fim de se dar um maior aprimoramento aos resultados empresariais intervalares, outros métodos, como os citados na seção 3.3, podem ser utilizados como auxílio para indicar se a solução tem maior tendência para o limite inferior ou para o superior, aperfeiçoando, pois, o processo de tomada de decisão.

Referências

[1] ASSAF, Alexandre. **Matemática Financeira e Suas Aplicações**. 9 ed. São Paulo: Atlas, 2006.

[2] BRUNI, Adriano Leal; FONSECA, Yonara Daltro da. **Técnicas de Avaliação de Investimentos: *uma Breve Revisão da Literatura***. Cadernos de Análise Regional: São Paulo, 2003, v. 1, p. 40-54.

[3] GALESNE, Alain; FENSTERSEIFER, Jaime; LAMB, Roberto. **Decisões de Investimentos da Empresa**. São Paulo: Atlas, 1999.

[4] HOLBIG, Carlos Amaral; DIVERIO, Tiaraju. **Sistema de Ponto Flutuante e o Padrão IEEE-754**. (Relatório de Pesquisa) - Porto Alegre: Instituto de Informática - UFRGS, 1994.

[5] MOORE, Ramon Edgar. **Interval Analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1966.

[6] MORAES, DALCIDIO et al. Introdução a Teoria dos Intervalos. In: ROQUE, Waldir L. (Org.). **EIMAC'96 - Escola de Inverno de Matemática Aplicada e Computacional**. Porto Alegre: UFRGS, 1996, v.1, p. 215-244.

[7] SANTIAGO, Regivan Hugo; BEDREGAL, Benjamin R. Callejas; ACIÓLY, Benedito Melo . Formal Aspects of Correctness and Optimality of Interval Computations. **Journal Formal Aspects of Computing**. New York: Berlin-Heildelberg, 2006, v. 18, p. 231-243.

[8] SILVA, Ivanosca Andrade da et al. **An Interval Approach for Imprecise Cost**. Artigo submetido ao Elsevier Science, março de 2007.