Métodos de Pontos Interiores aplicados à Operação Ótima de Redes Hidráulicas Malhadas

Aline M. Lima, **Aurelio R. L. Oliveira**,
IMECC - Instituto de Matemática, Estatística, e Ciência da Computação, UNICAMP,
Praça Sérgio Buarque de Holanda, 651,
13081-970, Campinas, SP,
E-mail: amlima@ime.unicamp.br, aurelio@ime.unicamp.br.

Resumo: *Neste trabalho, os métodos de pontos interiores primais-duais são desenvolvidos para o problema de minimização dos custos de bombeamento e das perdas de água nos problemas de distribuição. A estrutura matricial é explorada objetivando uma implementação eficiente. No problema de distribuição, as redes são complexas e os diâmetros são pequenos, fazendo com que as perdas tenham grande importância, tornando o problema de distribuição mais difícil. O método de pontos interiores se mostrou bastante robusto, convergindo rapidamente em todos os casos testados.*

1 Introdução

Desde o surgimento dos métodos de pontos interiores para programação linear, códigos computacionais baseados nessas idéias vêm se apresentando como alternativas eficientes para a resolução de problemas de grande porte [7, 8].

Uma linha de pesquisa importante considera classes específicas de problemas e explora as particularidades da estrutura matricial com o objetivo de obter implementações ainda mais eficientes. Esta exploração da estrutura pode levar a métodos de solução muito diversificados. Assim, dependendo do método e da classe de problemas, a melhor opção pode ser a utilização de métodos iterativos [11], decomposição *LU* ou *Cholesky* [6, 10], uma combinação entre decomposição e métodos iterativos [2], ou mesmo a redução do problema de tal forma que a esparsidade apareça apenas implicitamente [9]. Todas estas aplicações têm como resultado a obtenção de implementações mais eficientes que a utilização de métodos genéricos de otimização.

O gerenciamento da água é um tema muito importante devido à sua escassez, proporcionada pela má distribuição global de água. Com o crescimento das cidades, as companhias de abastecimento têm a tarefa complexa de fornecer água com custo otimizado para manter as cidades funcionando. Os recursos limitados de energia, suprimento ineficiente de água e as crescentes preocupações ambientais tornam a distribuição de água ainda mais desafiadora. O conjunto de obras e equipamentos destinados a suprir as necessidades de consumo de água doméstico, público e industrial de uma comunidade é denominado de sistema de abastecimento de água. Esses sistemas são divididos em cinco partes distintas: captação, adução, tratamento, reservatótio e rede de distribuição. Destas partes, uma que merece atenção especial é a rede de distribuição, que é, em sua maioria, uma rede malhada, cuja complexidade de estudo é muito alta.

O objetivo deste trabalho consiste em minimizar os custos de bombeamento e das perdas de água no problema de distribuição, utilizando os métodos de pontos interiores. Este desenvolvimento procura explorar as características específicas do problema e também as particularidades da estrutura matricial.

2 Formulação do Problema

Nesta seção, vamos apresentar o modelo matemático a ser utilizado para a minimização de custos do sistema de distribuição de água. O problema será representado por um modelo de fluxos em redes com restrições adicionais.

2.1 Modelo Matemático

Primeiramente, apresentaremos o modelo de distribuição de água para uma rede malhada:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \alpha \sum_{i=1}^{n} k_i q_i^a + \beta c^t p && (1)\\
\text{sujeito a} \quad & Aq = Ep - d, && (2)\\
& Tq = 0 && (3)\\
& Pmin_j \leq (h_c - h_j) - \sum_{i \in S} J_i, && (4)\\
& j = 1, \ldots, m, j \neq c && (5)\\
& q^{min} \leq q \leq q^{max}, && (6)\\
& p^{min} \leq p \leq p^{max} && (7)
\end{aligned}$$

onde:
n representa o número de trechos;
q representa a vazão em cada trecho de tubulação;
p representa a injeção de pressão de água nos nós onde há bombeamento;
a representa o expoente da vazão na perda de carga, por exemplo $1,852$ na fórmula empírica de Hazen-Willians para distribuição;
k_i representa a constante de proporcionalidade de perda de carga no trecho i (função do diâmetro e comprimento do trecho);
c representa o custo de bombeamento;
A representa a matriz de incidência da rede de distribuição;
E é uma matriz formada por vetores canônicos correspondentes aos nós de injeção de pressão;
T representa a matriz de perdas nas malhas da rede de distribuição;
d representa as demandas de água em cada nó;
m representa o número de nós;
$Pmin_j$ representa pressão mínima requirida em cada nó;
h_c representa a cota de cabeceira da rede (nó c);
h_j representa a cota do terreno no nó j;
J_i representa a equação de perdas no trecho i;
S representa o conjunto dos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre a cabeceira e cada nó;
q^{max} e q^{min} são os limites de vazão de água dados pelo produto da respectiva velocidade pelo diâmetro da tubulação;
p^{max} e p^{min} são os limites de pressão nos nós onde há bombeamento;
α e β são ponderações dos objetivos a minimizar.

Temos que as equações em (2) - (3) representam a rede de captação, as equações em (4) - (5) representam as pressões mínimas nos nós [3], e as equações (6) - (7) representam os limites de vazão e pressão do sistema de abastecimento. A função objetivo (1) considera a perda de água em cada trecho buscando assim a solução de menor perda global. O custo de bombeamento também é considerado e os dois objetivos combinados através das ponderações.

A equação utilizada para o cálculo das perdas de cargas será a de Hazen-Williams. O coeficiente de perda de Hazen-Williams C adotado é igual a 130. Diversos coeficientes "ω" diferentes são recomendados por vários autores, para a seguinte equação:

$$J_i = \omega \frac{1}{D_i^{4,87}} \left(\frac{q_i}{C}\right)^a L_i$$

onde J_i é a perda no trecho i em mca (metros de coluna de água), D_i é o diâmetro do tubo no trecho i em m, q_i é a vazão no trecho i em m^3/s e L_i é o comprimento do trecho i. Aqui optou-se por utilizar o valor de ω igual a $10,5088$, recomendado por Fujiwara e Khang [4], que é o que produz as menores perdas de carga.

Sendo assim, temos que

$$J_i = \omega \frac{1}{D_j^{4,87}} \left(\frac{q_j}{C}\right)^a L_j \Longrightarrow J_i = \frac{\omega L_i}{D_i^{4,87} C^a} q_i^a$$
$$\Longrightarrow k_i = \frac{\omega L_i}{D_i^{4,87} C^a} \text{ e } a = 1,852.$$

Podemos reescrever o conjunto de restrições (4) como um conjunto de restrições de igualdade e um conjunto de restrições de desigualdade como segue:

$$\begin{array}{c} A^t(v + h) - Kq^{a1} = 0 \\ v_j \geq Pmin_j. \end{array} \tag{8}$$

Num primeiro momento, vamos eliminar a equação de requerimento mínimo de pressão nos nós (4), a fim de obter um modelo semelhante ao modelo de um sistema elétrico, para o qual já existe um desenvolvimento [10]. Então o modelo para estudo será o seguinte:

$$\text{minimizar} \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} k_i q_i^a + \beta c^t p \tag{9}$$

$$\text{sujeito a} \quad Aq = Ep - d, \qquad Tq = 0 \tag{10}$$

$$q^{min} \leq q \leq q^{max} \tag{11}$$

$$p^{min} \leq p \leq p^{max} \tag{12}$$

3 Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Modelo de Fluxos em Rede Hidráulica

Considere o problema dado por (9)-(12). Faremos as seguintes alterações no mesmo a fim de simplificar o desenvolvimento do método:

- Mudança de variáveis $\tilde{q} = q - q^{min}$ e $\tilde{p} = p - p^{min}$, reduzindo o número de variáveis de folga do problema.
- As ponderações α e β terão valor unitário.
- O expoente da vazão a será igual a dois, e então teremos um problema quadrático. O problema original será resolvido da seguinte forma: Primeiramente, calcularemos q considerando este valor para a, depois, para compensar esta aproximação, incorporamos a diferença na matriz K, e então recalcularemos q, de forma similar às idéias desenvolvidas em [1].
- Temos que a perda não é função linear da vazão, mas num primeiro momento, vamos considerar uma aproximação linear para a equação de balanço das perdas $Tq = 0$. O problema original será resolvido da seguinte forma: Primeiramente, calcularemos q considerando esta aproximação linear, depois, para compensar esta aproximação, incorporamos a diferença na matriz T, e então recalcularemos q.

Após estas alterações e introduzindo as variáveis de folga das restrições de capacidade, temos:

$$\begin{array}{ll} min & q^t K q + {k_1}^t q + c^t p \\ sa & Aq - Ep = d_1, \; Tq = d_2 \\ & q + s_q = q^{max}, \; p + s_p = p^{max} \\ & (q, s_q) \geq 0, \; (p, s_p) \geq 0. \end{array} \tag{13}$$

Ao problema primal dado por (13), associamos o problema dual formulado em (14), já com as variáveis de folga introduzidas.

$$\begin{array}{ll} max & d^t y - (q^{max})^t w_q - (p^{max})^t w_p - q^t K q \\ sa & B^t y - w_q - Kq + z_q = k_1 \\ & -E^t y - w_p + z_p = c \\ & (z_p, w_p) \geq 0, \; (z_q, w_q) \geq 0, \end{array} \tag{14}$$

onde $B = \begin{pmatrix} A \\ T \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ e $E^t y$ representa os elementos da variável dual y correspondentes às bombas.

Temos que as condições de otimalidade são dadas por:

$$\text{factibilidade primal:} \begin{cases} Aq - Ep = d_1 \\ Tq = d_2 \\ q + s_q = q^{max} \\ p + s_p = p^{max} \\ (q, s_q, p, s_p) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{factibilidade dual:} \begin{cases} B^t y + z_q - w_q - Kq = k_1 \\ -E^t y + z_p - w_p = c \\ (z_p, w_p, z_q, w_q) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{condições de complementaridade:} \begin{cases} QZ_q e = 0 \\ PZ_p e = 0 \\ S_q W_q e = 0 \\ S_p W_p e = 0, \end{cases}$$

onde $k_1 = 2Kq^{min}$, $d_1 = p^{min} - d - Aq^{min}$, $d_2 = -Tq^{min}$, $s_q = q^{max} - q$ e $s_p = p^{max} - p$ são as variáveis de folga do problema primal e, z_q e z_p são as variáveis de folga do problema dual.

Então, de posse das condições de otimalidade, desenvolveremos o método de pontos interiores primal-dual para este problema.

3.1 Método Primal-Dual Aplicado ao Modelo de Fluxos em Rede Hidráulica

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, obtemos:

$$\begin{cases} Adq - Edp = r_1 \\ Tdq = r_2 \\ dq + ds_q = r_3 \\ dp + ds_p = r_4 \\ B^t dy + dz_q - dw_q - Kd_q = r_5 \\ -E^t dy + dz_p - dw_p = r_6 \\ Z_q dq + Qdz_q = r_7 \\ Z_p dp + Pdz_p = r_8 \\ W_q ds_q + S_q dw_q = r_9 \\ W_p ds_p + S_p dw_p = r_{10}, \end{cases} \tag{15}$$

onde os resíduos são dados por:

$$\begin{aligned} &r_1 = d_1 + Ep - Aq, \\ &r_2 = d_2 - Tq, \\ &r_3 = q^{max} - q - s_q, \\ &r_4 = p^{max} - p - s_p, \\ &r_5 = k_1 - B^t y - z_q + w_q + Kq, \\ &r_6 = c + E^t y - z_p + w_p, \\ &r_7 = \mu e - QZ_q e, \\ &r_8 = \mu e - PZ_p e, \\ &r_9 = \mu e - S_q W_q e, \\ &r_{10} = \mu e - S_p W_p e. \end{aligned}$$

O sistema (15) pode ter sua dimensão substancialmente reduzida através de eliminação de variáveis.

Primeiramente, eliminamos as variáveis de folga: Primeiramente, eliminamos as variáveis de folga:

$$\begin{aligned} &ds_q = r_3 - dq, \\ &ds_p = r_4 - dp, \\ &dz_q = Q^{-1}(r_7 - Z_q d_q), \\ &dz_p = P^{-1}(r_8 - Z_p d_p), \\ &dw_q = S_q^{-1}(r_9 - W_q ds_q), \\ &dw_p = S_p^{-1}(r_{10} - W_p ds_p). \end{aligned}$$

Com essas substituições, o sistema (15) se reduz a:

$$\begin{cases} Adq - Edp = r_1 \\ Tdq = r_2 \\ B^t dy - D_q dq = r_a \\ -E^t dy - D_p dp = r_b, \end{cases} \tag{16}$$

onde $D_q = Q^{-1}Z_q + S_q^{-1}W_q + K$, $D_p = P^{-1}Z_p + S_p^{-1}W_p$, $r_a = r_5 - Q^{-1}r_7 + S_q^{-1}r_q - S_q^{-1}W_q r_3$ e $r_b = r_6 - P^{-1}r_8 + S_p^{-1}r_{10} - S_p^{-1}W_p r_4$.

Note que apenas inversas de matrizes diagonais estão envolvidas. Eliminando dp e dq em (16) temos:

$$\begin{aligned} &dq = -{D_q}^{-1}(r_a - B^t dy), \\ &dp = -{D_p}^{-1}(r_b + E^t dy). \end{aligned}$$

Substituindo nas demais equações de (16), temos:

$$\begin{cases} A{D_q}^{-1}B^t dy + D_p^{-1}E^t dy = \\ r_1 + AD_q^{-1}r_a - D_p^{-1}r_b \\ T{D_q}^{-1}B^t dy = r_2 + TD_q^{-1}r_a, \end{cases}$$

lembrando que $B = \begin{pmatrix} A \\ T \end{pmatrix}$.

Definindo $D = \begin{pmatrix} -D_p^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $E^t dy = dy(p) = Ddy$ e $\tilde{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, e unindo as equações temos:

$$(BD_q^{-1}B^t + D)dy = r, \tag{17}$$

onde $r = \tilde{r} + BD_q^{-1}r_a - Dr_b$.

O fato de a matriz B ter dimensão $n+1 \times n$ é bastante relevante. Esta característica pode ser utilizada para reduzir o esforço computacional por iteração dos métodos de pontos interiores, assim, se formarmos a matriz não singular $\tilde{B} = [B \;\; e_j]$, onde e_j representa um vetor canônico, temos que o sistema (17) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$(\tilde{B}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t + \tilde{D})dy = r, \tag{18}$$

onde $\tilde{D}_q^{-1}$ incorpora o elemento diagonal retirado de D para formar $\tilde{D}$. A resolução de (18) se dá em duas etapas. Na primeira, um sistema linear contendo apenas a matriz $\tilde{B}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t$ é resolvido. Vale observar que como $\tilde{B}$ é quadrada, a resolução do sistema com a matriz $\tilde{B}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t$ fica muito barata, pois apenas a matriz diagonal $\tilde{D}_q$ varia a cada iteração. Então, apenas uma decomposição de $\tilde{B}$ é necessária e pode ser realizada antes da aplicação do método iterativo.

Na segunda etapa, a fórmula de Sherman–Morrison–Woodbury [5] é aplicada para a obtenção de dy:

$$\begin{aligned} W &= \tilde{B}^{-1}E \\ Z &= W^t\tilde{D}_q W \\ v &= (\tilde{B}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t)^{-1}r \\ dy &= v - (\tilde{C}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t)^{-1}E(\tilde{D}^{-1} + Z)^{-1}E^t v, \end{aligned}$$

onde E é formada por vetores canônicos correspondentes aos elementos diagonais não nulos de $\tilde{D}$. Consequentemente, W é fixa para uma determinada rede e pode ser calculada antes da aplicação do método iterativo.

4 Resultados Numéricos

Mostraremos, nesta seção, os resultados iniciais obtidos pela aplicação dos métodos de pontos interiores primal-dual ao problema de fluxo em redes hidráulicas. A implementação foi feita em MATLAB 5.3.

Aplicamos o método para a rede de distribuição que é formada por oito trechos, distribuidos em dois anéis [3], e os dados relacionados com as características da rede, demandas e cotas de cada nó estão sintetizados nas Tabelas 1 e 2. A fim de obtermos um problema mais interessante, adicionamos uma bomba ao problema original no nó 7.

Nó	Demanda(m^3/h)	Elevação(m)
1(reservatório - bomba)	0	210
2	100	150
3	100	160
4	120	155
5	270	165
6	330	160
7(bomba)	200	150

Tabela 1: Dados relativos aos nós

Trecho	Orig	Dest	Compr(m)	Diâm(pol)
1	1	2	1000	20
2	3	2	1000	12
3	2	4	1000	16
4	4	7	1000	1
5	4	5	1000	16
6	5	6	1000	10
7	7	3	1000	12
8	7	6	1000	2

Tabela 2: Dados relativos aos trechos.

Realizamos os seguintes testes:

1. Adotamos o valor $p^{min} = 0$ para as bombas e $c = 0$, ou seja, estamos minimizando apenas as perdas nos trechos.

2. Adotamos $p^{min} = 0$ e um custo de bombeamento igual para duas bombas.

3. Adotamos $p^{min} = 0$ e um custo de bombeamento da bomba em 1 duas vezes maior que o custo em 7.

4. Adotamos $p^{min} = 0$ e um custo de bombeamento da bomba em 7 duas vezes maior que o custo em 1.

5. Idem 1, com $p^{min} = 30$.

6. Idem 2, com $p^{min} = 30$.

7. Idem 3, com $p^{min} = 30$.

8. Idem 4, com $p^{min} = 30$.

Os resultados para os 8 testes encontram-se nas tabelas abaixo, onde a Tabela 3 contém o número de iterações e a pressão nas bombas 1 e 7, e a Tabela 4 contém o fluxo de água em cada trecho, para cada caso.

Caso	Iterações	Bomba 1	Bomba 2
1	5	0,05	1063,28
2	4	886,48	148,20
3	4	843,54	254,93
4	4	878,04	171,03
5	15	267,94	877,68
6	4	917,85	145,73
7	4	875,31	252,53
8	4	909,66	168,25

Tabela 3: Resultados relativos ao bombeamento.

Podemos verificar que o método é robusto, convergindo em todos os casos testados, em um número pequeno de iterações (quatro), convergindo em quinze iterações em apenas um caso.

Caso Trecho	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	886	844	878	238	887	845	880
2	490	-397	-354	-388	252	-398	-355	-390
3	390	390	390	389	390	389.	389	389
4	-0,01	0	0	0	0	0	0	0
5	270	270	269	269	270	270	269	269
6	0,39	-0,1	-0,08	-0,1	0,26	-0,10	-0,08	-0,1
7	590	-297	-253	-288	352	-298	-255	-290
8	329	330	330	330	329	330	330	330

Tabela 4: Resultados relativos ao fluxo.

Pode-se concluir também que quando aumentamos o custo na bomba 1, o bombeamento aumenta em 7 e vice-versa, validando a implementação, nos mostrando que o objetivo está sendo cumprido.

5 Conclusões

Podemos verificar, na Tabela 3, que quando não consideramos o custo de bombeamento (caso 1) há um bombeamento bem maior em 7 que em 1, visto que o nó 1 tem apenas um trecho conectado a ele e o nó 7 tem três trechos, e por consequência atende uma demanda maior que o 1. Podemos observar também que a quando aumentamos o custo em 1, o bombeamento diminui com relação ao caso em que temos custos iguais, e vice versa. Quanto aos fluxos, podemos destacar que os trechos 4 e 6 quase não há fluxo, pois o trecho 4 liga o nó 4 ao 7, onde há bombeamento, e o nó 4 é mais alto que o 7. Já o trecho 6, liga os nós 5 e 6, que por sua vez, está conectado à bomba em 7, fazendo com que não necessite de fluxo vindo de 5, que também está em um nível mais baixo que o 6. Isso nos faz ver que os resultados estão todos coerentes respeito a configuração da rede.

Os métodos de pontos interiores se mostraram robustos, convergindo bem mesmo para todos os testes realizados, sem apresentar instabilidade numérica. Temos como possibilidade de extensão deste trabalho a correção da aproximação quadrática da função objetivo, bem como a inclusão das restrições de pressão mínima nos nós, e o desenvolvimento do método de pontos interiores para o modelo completo.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Referências

[1] A.T. Azevedo, "Aplicação de Métodos de Pontos Interiores a Problemas de Manufatura e Engenharia Elétrica", Dissertação de Mestrado, FEEC – UNICAMP, 2002.

[2] J. Castro, A Specialized Interior-Point Algorithm for Multcommodity Network Flows, *SIAM J. Optimization*, 10 (2000) 852-877.

[3] W. F. Curi and M. B. M. Firmino, Prehdim - Projeto de Redes Hidráulicas com Dimensionamento Malhado, em "Anais do XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, Recife PE", pp. 1-15, 2004.

[4] O. Fujiwara and D. M. Kang, A Two-fase Decomposition Method for Optimal Design of Looped Water Distribution Networks, *Water Resources research, AGO*, 4(26) 539-549.

[5] G. H. Golub and C.F. Van Loan, "Matrix Computations Third Edition", The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1996.

[6] J. L. Kennington and R. V. Helgason, "Algorithms for Network Programming", Wiley, New York, 1980.

[7] I. J. Lustig, R. E. Marsten and D. F. Shanno, On Implementing Mehrotra's Predictor-Corrector Interior Point Method for Linear Programming, *SIAM J. Optimization*, 2 (1992) 435-449.

[8] A. R. L. Oliveira and C. Lyra, Implementação de um Método de Pontos Interiores para Programação Linear, *SBA: Controle & Automação*, 3(2), (1991) 370-382.

[9] A. R. L. Oliveira and C. Lyra, Interior Point Methods for the Polynomial L_∞ Fitting Problem, *International Transactions in Operational Research*, 11(3), (2004) 309-322.

[10] A. R. L. Oliveira, S. Soares and L. Nepomuceno, Optimal Active Power Dispatch Combining Network Flow and Interior Point Approaches, *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(4), (2003) 1235-1240.

[11] M. G. C. Resende and G. Veiga, An Efficient Implementation of a Network Interior Point Method, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 12, (1993) 299-348.