ISSN 1984-820X

Equação de Langevin Fracionária Generalizada

Rubens F. Camargo, **Ary O. Chiacchio**,
Departamento de Matemática - Imecc - Unicamp
13081-970, Campinas, SP
rubens@ime.unicamp.br ary@ime.unicamp.br
Edmundo C. Oliveira,
Departamento de Matemática Aplicada - Imecc - Unicamp
13081-970, Campinas, SP
capelas@ime.unicamp.br

Resumo

Apresenta-se a assim chamada equação de Langevin fracionária generalizada, para uma partícula de massa unitária, no caso em que não há um campo determinístico. As derivadas fracionárias são consideradas no sentido de Caputo e a solução da equação é obtida através da metodologia da transformada de Laplace. Como casos particulares, recuperamos alguns resultados recentes.

Introdução

Nos últimos dez anos tem havido um considerável crescimento no número de processos envolvendo difusão anômala [13]. Estes processos ocorrem em inúmeras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Biologia [6, 10] e na Física [1, 3, 12].

Em um recente trabalho [16] uma função de Mittag-Leffler foi introduzida no estudo da equação cinética, deslocamentos aleatórios e difusão anômala. Outro recente trabalho [20] mostra a solução analítica da equação de Langevin associada ao problema de uma partícula harmonicamente confinada. Os mesmos autores [21] apresentam e discutem a difusão anômala induzida por uma função de Mittag-Leffler correlacionada a um ruído, na qual os autores apresentam alguns casos particulares que caracterizam o ruído. Além disso, de acordo com o valor do expoente da difusão anômala, são mencionados os casos de subdifusão e superdifusão. Também neste trabalho são citados alguns artigos nos quais a teoria foi aplicada com sucesso. Mencionamos ainda, que a difusão anômala desempenha um importante papel no estudo do conhecido problema da equação de onda e da equação de reação-difusão [8].

Uma forma natural de se estudar a difusão anômala é através da equação de Langevin generalizada [14]. No referido artigo os autores mostram como o comportamento de longo prazo do deslocamento médio quadrático, para os sistemas descritos pela equação de Langevin generalizada, dependem das propriedades da função de correlação e do núcleo de memória.

Aqui estudamos a versão fracionária da equação de Langevin generalizada na ausência de um campo determinístico[1]. Este trabalho está disposto da seguinte maneira: Na Seção 1 apresentamos alguns resultados associados à clássica equação de Langevin generalizada, incluindo a metodologia da transformada de Laplace, a qual é utilizada para obter a solução em termos da função de relaxação. Na Seção 2 introduzimos a versão fracionária da equação de Langevin generalizada, recuperando os resultados da Seção 1, como casos particulares. Na Seção 3 utilizando uma função de correlação específica obtemos a correspondente função de relaxação. Na Seção 4 apresentamos nossos principais resultados, ou seja, calculamos explicitamente os núcleos em termos da função de Mittag-Leffler generalizada, que nos permite, por exemplo, obter as variâncias. Por fim apresentamos nossas conclusões.

[1]Uma discução mais detalhada pode ser encontrada em [9].

1 Equação de Langevin Generalizada

Nesta seção apresentamos a clássica equação de Langevin generalizada (ELG) e sua solução em termos de uma função de relaxação que caracteriza o processo físico, obtida através da transformada de Laplace.

A abordagem clássica, conhecida como teoria de Ornstein-Uhlenbeck (ou Einstein-Ornstein-Uhlenbeck) do movimento Browniano foi inicialmente apresentada por Langevin, enquanto que a difusão usual e o movimento Browniano estão associados à equação de Langevin. A equação de Langevin clássica e sua generalização, foram revistas com um tratamento fracionário há alguns anos atrás por Mainardi-Pironi [11]. Neste trabalho os autores discutem a equação de Langevin associada apenas à velocidade. Para discutir a equação de Langevin associada ao deslocamento é necessário efetuar uma integração em relação à variável temporal.

A ELG, na ausência de um campo determinístico, é dada por

$$\mathsf{D}_t^2 x(t) + \int_0^t \mu(t-\xi)\,\mathsf{D}_\xi x(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(t) \qquad (1)$$

com $\mathsf{D}_y \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}y$ na qual $y = t, \xi$, e $\mu(t)$ é o núcleo de memória dissipativa e $F(t)$ é uma força aleatória. Consideramos a equação (1) com duas condições determinísticas, isto é, $x(0) = x_0$, condição inicial, e $\dot{x}(0) = v_0$, velocidade inicial da partícula de massa unitária.

Para resolver a equação (1) introduzimos a transformada de Laplace. Utilizando o teorema da convolução podemos escrever

$$[s^2 + s\widehat{\mu}(s)]\widehat{x}(s) = x_0[s + \widehat{\mu}(s)] + v_0 + \widehat{F}(s) \quad (2)$$

na qual $\widehat{\mu}(s)$, $\widehat{x}(s)$ e $\widehat{F}(s)$ denotam, respectivamente, as transformadas de Laplace de $\mu(t)$, $x(t)$ e $F(t)$, e s é o parâmetro da transformada de Laplace.

Introduzindo a função de relaxação, $H(t)$, como sendo a transformada de Laplace inversa, i.e.,

$$\widehat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + s\widehat{\mu}(s)} \qquad (3)$$

podemos escrever

$$\widehat{x}(s) = \widehat{H}(s)\{x_0[s + \widehat{\mu}(s)] + v_0 + \widehat{F}(s)\},$$

cuja respectiva transformada inversa é dada por

$$x(t) = x_0 + v_0 H(t) + \int_0^t H(t-\xi)F(\xi)\mathrm{d}\xi$$

a qual pode ser reescrita na seguinte forma

$$x(t) = \langle x(t)\rangle + \int_0^t H(t-\xi)F(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (4)$$

onde denotamos $\langle x(t)\rangle = x_0 + v_0 H(t)$.

A derivada primeira da equação (4) é dada por

$$\dot{x}(t) = \langle \dot{x}(t)\rangle + \int_0^t h(t-\xi)F(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (5)$$

na qual $\langle \dot{x}(t)\rangle = v_0 h(t)$ e a função de relaxação, $h(t)$, é a derivada de $H(t)$, i.e., $h(t) = \dot{H}(t)$. Desta forma, temos

$$\widehat{h}(s) = \frac{1}{s + \widehat{\mu}(s)} \equiv s\widehat{H}(s)$$

com as condições $H(0) = 0$ e $h(0) = 1$, obtidas através das equações (4) e (5).

Novamente, com auxílio das equações (4) e (5), podemos discutir as equações explícitas para as variáveis associadas à equação (1), em particular a difusão anômala e a distribuição de probabilidades [14].

2 Equação de Langevin Fracionária Generalizada

Existem várias maneiras de se explicar fenômenos envolvendo difusão anômala, em particular, estendendo a definição de entropia na estatística convencional de Gibbs-Boltzmann bem como, através da equação de Fokker-Plank com derivadas fracionárias ou com coeficientes associados à difusão variando no tempo.

Aqui, nesta seção, seguindo a via da generalização fracionária, apresentamos e discutimos a assim chamada equação de Langevin fracionária generalizada (ELFG), considerando a metodologia da transformada de Laplace de maneira similar a feita para a ELG na seção anterior.

A ELFG, versão fracionária da ELG, é definida por

$$\mathsf{D}_t^\alpha x(t) + \int_0^t \mu(t-\xi)\,\mathsf{D}_\xi^\beta x(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(t) \qquad (6)$$

com $1 < \alpha \leq 2$ e $0 < \beta \leq 1$. O operador D denota a derivada fracionária considerada no sentido de Caputo.

Aqui $x(t)$ representa a posição de uma partícula, $\mu(t-t')$ o núcleo de memória dissipativa o qual é tomado de maneira similar ao utilizado em [21], i.e., em termos de uma função de Mittag-Leffler[2] e $F(t)$ é uma força gaussiana. Tomando os limites $\alpha \to 2$ e $\beta \to 1$, os resultados envolvendo a ELG são recuperados.

Por outro lado, em um recente trabalho [17] foi apresentado uma classe de ELG com derivadas fracionárias, também no sentido de Caputo. Os autores discutem um sistema envolvendo processos de difusão com uma função de correlação de dois tipos: a exponencial, a lei de força e os termos associados ao campo determinístico iguais a zero, ou seja, a equação (6) para o caso em que $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$. O mesmo autor [18] discute a equação de Langevin fracionária com a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville. Ele compara estes resultados com os obtidos em [17] considerando o termo determinístico como sendo nulo. Foi discutida recentemente [21], a difusão anômala induzida por uma função de correlação de ruído como sendo uma função de Mittag-Leffler. No trabalho os autores obtêm a expressão exata para os valores principais, variância e coeficientes de difusão para uma partícula em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros e suas derivadas. Mencionamos que a equação discutida naquele trabalho é uma ELG, ao contrário da equação apresentada em [18], que é uma ELFG.

Aqui, discutimos as soluções analíticas da equação (6) através da transformada de Laplace. Desta forma, aplicando a transformada de Laplace na equação (6) e utilizando a relação que envolve a tranformada de Laplace e derivadas [7], obtemos

$$[s^{\alpha}+s^{\beta}\widehat{\mu}(s)]\widehat{x}(s) =$$

$$= s^{\alpha-1}x_0 + s^{\alpha-2}v_0 + x_0 s^{\beta-1}\widehat{\mu}(s) + \widehat{F}(s)$$

que para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ recupera a equação (2).

Introduzindo a função de relaxação, $H(t)$, podemos escrever a equação anterior na seguinte forma

$$\widehat{x}(s) = \widehat{H}(s)\left\{\frac{x_0}{s}[s^{\alpha}+s^{\beta}\widehat{\mu}(s)] + v_0 s^{\alpha-2} + \widehat{F}(s)\right\}$$

cuja transformada inversa, denotada por $\mathfrak{L}^{-1}[f(s)]$, pode ser escrita como

$$x(t) = x_0 + v_0\mathfrak{L}^{-1}\left[\widehat{H}(s)s^{\alpha-2}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\widehat{H}(s)\widehat{F}(s)\right].$$

Utilizando o teorema de convolução, associado à transformada de Laplace, obtemos a solução

$$x(t) = x_0 +$$

$$+ v_0\mathfrak{L}^{-1}\left[\widehat{H}(s)s^{\alpha-2}\right] + \int_0^t H(t-\xi)F(\xi)\mathrm{d}\xi$$

onde $\widehat{H}(s)$ é a transformada de Laplace da função $H(t)$. A partir deste ponto devemos distinguir uma função de relaxação particular.

Como já dissemos anteriormente, para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ os resultados associados à equação (1), bem como suas consequências, são mostrados em [17]. Estes resultados são generalizações no sentido em que, consideramos sua versão fracionária e tomamos o modelo de função correlacionada como sendo uma função de Mittag-Leffler conveniente, ou seja, a clássica função de Mittag-Leffler com um parâmetro, como considerado em [21].

3 Uma Função de Correlação Particular

Nesta seção explicitamos o cálculo dos núcleos, $H(t)$ e $h(t)$, que aparecem nas expressões envolvendo variâncias [13], supostas na forma

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(t) &= k_B T\,[2I(t) - H^2(t)] \\
\sigma_{vv}(t) &= k_B T\,[1 - h^2(t)] \\
\sigma_{xv}(t) &= k_B T\,H(t)\,[1 - h(t)] \qquad (7)
\end{aligned}$$

onde

$$I(t) = \int_0^t \mathrm{d}\xi\, H(\xi),$$

k_B é a constante de Boltzmann e T é temperatura absoluta do meio [14].

A equação (7) representa um sistema em estado de equilíbrio, as funções $\mu(t)$, o núcleo de

[2] Como o ruído estacionário é exponencialmente correlacionado parece natural propor uma generalização utilizando a função de Mittag-Leffler.

memória dissipativa e $C(t)$, a função de correlação, são relacionadas pelo conhecido teorema de flutuação-dissipação [14]

$$C(t) = k_B\, T\, \mu(t).$$

Aqui, consideramos o caso no qual o núcleo de memória dissipativa pode ser escrito da seguinte forma [21]

$$\mu(t) = \gamma_\lambda E_\lambda[-(t/\tau)^\lambda]/\tau^\lambda \tag{8}$$

com $0 < \lambda < 2$. Temos que $\mu(t)$ deve ser determinado por um mecanismo dinâmico associado ao processo físico. $E_\lambda(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro[3], γ_λ é uma constante que depende de λ mas não possui dependência temporal e τ é a memória temporal característica. O caso particular para $\lambda = 1$ está associado com o processo de Ornstein-Uhlenbeck padrão [2]. Utilizando a expressão (8) a função de correlação pode ser escrita como

$$C(t) = C_0(\lambda)\tau^{-\lambda} E_\lambda[-(t/\tau)^\lambda]$$

onde τ age como uma memória temporal característica e $C_0(\lambda) = \gamma_\lambda\, k_B\, T$ é o coeficiente de proporcionalidade dependendo do parâmetro λ.

Procedendo de maneira análoga à feita na Seção 1, utilizando o núcleo de memória dissipativa dado pela equação (8), podemos escrever a respectiva transformada da seguinte forma

$$\widehat{\mu}(s) = \gamma_\lambda \frac{s^{\lambda-1}}{1 + s^\lambda \tau^\lambda} \tag{9}$$

a qual fornece a transformada de Laplace correspondente à função de relaxação

$$\widehat{H}(s) = \widehat{H}_0(s) + \widehat{H}_1(s) \tag{10}$$

com $\widehat{H}_1(s) = \tau^{-\lambda} s^{-\lambda} \widehat{H}_0(s)$ na qual $\widehat{H}_0(s)$ é dado pela seguinte expressão

$$\widehat{H}_0(s) = \frac{s^{\lambda-\alpha}}{s^\lambda + (\gamma_\lambda/\tau^\lambda)\, s^{\lambda+\beta-\alpha-1} + (1/\tau^\lambda)} \tag{11}$$

que para $\alpha = 2 = 2\beta$ recupera os resultados obtidos em [21].

[3] A função de Mittag-Leffler clássica, para $0 < \lambda < 1$, é uma função estritamente monótona e para $1 < \lambda \leq 2$ pode ser decomposta em uma função completamente monótona somada a uma contribuição oscilatória [19].

4 Núcleos e a Função de Mittag-Leffler Generalizada

Nesta última seção, utilizando a equação (11) obtemos os núcleos necessários para se calcular as variâncias. Todos os resultados são apresentados em termos da função de Mittag-Leffler generalizada, ao contrário da notação utilizada em [21] no qual os autores apresentam os resultados em termos da derivada da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros[4].

Devemos agora calcular a transformada de Laplace inversa da equação (11). Para tanto, utilizamos a definição da transformada de Laplace para escrever

$$\mathfrak{L}[t^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(a\, t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha - a)^\rho}$$

na qual $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer, definido por $(\rho)_0 = 1$,

$$(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)} \equiv \rho(\rho+1)\cdots(\rho+k-1), \tag{12}$$

$\mathrm{Re}(s) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $a \in \mathbb{C}$, e $|as^{-\alpha}| < 1$. Desta forma a correspondente transformada inversa é dada por

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha - a)^\rho}\right] = t^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(a\, t^\alpha).$$

Utilizando a equação anterior e a série geométrica podemos escrever a seguinte relação

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + A\, s^\beta + B}\right] = \tag{13}$$
$$= t^{\alpha-\rho} \sum_{r=0}^{\infty} (-A)^r t^{(\alpha-\beta)r}\, E^{r+1}_{\alpha,\alpha+1-\rho+(\alpha-\beta)r}(-B\, t^\alpha)$$

na qual $\mathrm{Re}(\alpha) > \mathrm{Re}(\beta) > 0$ e $\mathrm{Re}(\rho) > 0$.

Para calcular a transformada de Laplace inversa da equação (11) utilizamos a relação dada pela equação (13) e obtemos, para $\nu = \alpha - \beta + 1$

$$H_0(t) \equiv \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{H}_0(s)] = \tag{14}$$
$$= t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E^{r+1}_{\lambda,\alpha+\nu r}\left[-(t/\tau)^\lambda\right].$$

[4] A relação entre a função de Mittag-Leffler generalizada e a derivada da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros pode ser encontrada em [9].

Procedendo como anteriormente temos

$$H_1(t) \equiv \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{H}_1(s)] = (t/\tau)^\lambda \, t^{\alpha-1} \times \tag{15}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E^{r+1}_{\lambda,\lambda+\alpha+\nu r}\left[-(t/\tau)^\lambda\right].$$

Por outro lado, para obter o núcleo $h(t)$ a transformada de Laplace inversa é calculada da seguinte maneira

$$h_0(t) = \mathfrak{L}^{-1}[s\widehat{H}_0(s)] \quad \text{e} \quad h_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}[s\widehat{H}_1(s)]$$

então obtemos $h(t) = h_0(t)+h_1(t)$. De maneira similar, sendo $\Lambda = \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r}$ temos

$$h_0(t) = t^{\alpha-2} \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda E^{r+1}_{\lambda,\alpha-1+\nu r}\left[\frac{(-t)^\lambda}{\tau^\lambda}\right] \tag{16}$$

e

$$h_1(t) = \frac{t^{\lambda+\alpha}}{\tau^\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda E^{r+1}_{\lambda,\lambda+\alpha+1+\nu r}\left[\frac{(-t)^\lambda}{\tau^\lambda}\right] \tag{17}$$

onde $\nu = \alpha - \beta + 1$.

Finalmente, por integração, obtemos $I(t) = I_0(t) + I_1(t)$, onde

$$I_0(t) \equiv \int_0^t \mathrm{d}\xi H_0(\xi) = \tag{18}$$

$$= t^\alpha \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E^{r+1}_{\lambda,\alpha+1+\nu r}\left[-(t/\tau)^\lambda\right]$$

e

$$I_1(t) = (t/\tau)^\lambda \, t^\alpha \times \tag{19}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E^{r+1}_{\lambda,\lambda+\alpha+1+\nu r}\left[-(t/\tau)^\lambda\right]$$

com $\nu = \alpha - \beta + 1$.

As equações (14)-(19), generalizam os resultados obtidos em [21]. Com estes núcleos podemos obter a evolução temporal do valor da posição, $\langle x(t)\rangle = x_0 + v_0 H(t)$, e a velocidade, $\langle \dot{x}(t)\rangle = v_0 h(t)$, assim como as variâncias dos processos, a partir das equações (7).

5 Conclusões

Apresentamos uma extensão da clássica ELG, permitindo que as derivadas de ordem inteira da equação original possam assumir valores fracionários e recuperamos recentes resultados.

Mencionamos que o trabalho [15] apresenta uma generalização fracionária para a equação de Langevin, porém como um modelo dinâmico da memória observada na série temporal num problema advindo do mercado financeiro, sendo a derivada no sentido de Riemann-Liouville. Um tratamento similar envolvendo a derivada fracionária no sentido de Caputo será apresentada em um artigo em elaboração [4].

Uma continuação natural deste trabalho é discutir a ELFG associada à uma particula que sobre a influência de uma força aleatória modelada por um ruído Gaussiano colorido e um campo externo proporcional ao deslocamento [5].

Agradecimentos

RFC e ECO são gratos, respectivamente, ao CNPq e à FAPESP (06/51275-6), por suporte financeiro e auxílio à pesquisa.

Referências

[1] J. D. Bao and Y. Z. Zhuo, *Investigation on Anomalous Diffusion for Nuclear Fusion Reaction*, Phys. Rev. C, **67**, 064606, (2003).

[2] A. Baule and R. Friedrich, *Two-Point Correlation Function of the Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes*, Europhys. Lett., **79**, 60004, (2007).

[3] J. Bisquert, *Interpretation of a Fractional Diffusion Equation with Nonconserved Probability Density in Terms of Experimental Systems with Trapping or Recombination*, Phys. Rev., **72**, 011109 (2005).

[4] E. Capelas de Oliveira, *Fractional Langevin Equation and the Caputo Fractional Derivative*, (2009).

[5] E. Capelas de Oliveira, *Fractional Generalized Langevin Equation for a Particle in an External Field*, (2009).

[6] S. Chaudhury and B. J. Cherayil, *Complex Chemical Kinetics in Single Enzyme Molecules: Kramer's Model With Fractional Gaussian Noise*, J. Chem. Phys., **125**, 024904, (2006).

[7] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation*, J. Math. Phys., **49**, 033505, (2008).

[8] R. Figueiredo Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *On Some Fractional Green's Functions*, aceito J. Math. Phys., (2009).

[9] R. Figueiredo Camargo, *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, (2009).

[10] S. C. Kou and X. S. Xie, *Generalized Langevin Equation with Fractional Gaussian Noise: Subdiffusion Within a Single Protein Molecule*, Phys. Rev. Lett., **93**, 180603, (2004).

[11] F. Mainardi and P. Pironi, *The Fractional Langevin Equation*: *Brownian Motion Revisited*, Extracta Mathematicae, **11**, 140-154, (1996).

[12] A. M. Mathai, R. K. Saxena, and H. J. Haubold, *A Certain Class of Laplace Transform With Applications to Reaction and Reaction-Diffusion Equations*, Astrophys. Space Sci., **305**, 283-288, (2006).

[13] R. Metzler and J. Klafter, *The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Kinetic Equation*, Phys. Reports, **339**, 1-77, (2000).

[14] J. M. Porrà, K. G. Wang and J. Masoliver, *Generalized Langevin Equations: Anomalous Diffusion and Probability Distributions*, Phys. Rev. E, **53**, 5872-5881, (1996).

[15] S. Picozzi and B. J. West, *Fractional Langevin Model of Memory in Financial Markets*, Phys. Rev. E, **66**, 046118 (2002).

[16] Rui Yu and H. Zhang, *New Function of Mittag-Leffler Type and Its Application in the Fractional Diffusion-Wave Equation*, Chaos, Solitons & Fractals, **30**, 946-955, (2006).

[17] K. Sau Fa, *Generalized Langevin Equation with Fractional Derivative and Long-Time Correlation Function*, Phys. Rev. E, **73**, 061104 (2006).

[18] K. Sau Fa, *Fractional Langevin Equation and Riemann-Liouville Fractional Derivative*, Eur. Phys. J. E., **24**, 139-143 (2007).

[19] E. Scalas, R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional Calculus and Continuous-Time Finance*, Physica A, **284**, 376-384, (2000).

[20] A. D. Viñales and M. A. Despósito, *Anomalous Diffusion*: *Exact Solution of the Generalized Langevin Equation for Harmonically Bounded Particle*, Phys. Rev. E, **73**, 016111 (2006).

[21] A. D. Viñales and M. A. Despósito, *Anomalous Diffusion Induced by a Mittag-Leffler Correlated Noise*, Phys. Rev. E, **75**, 042102, (2007).