 ISSN 1984-820X

# Obtenção de um método compacto de quarta ordem para as equações de Navier-Stokes

Katia Prado Fernandes    Paulo F. A. Mancera
Departamento de Bioestatística, IBB, UNESP
18618-000, Botucatu, SP
E-mail: katiapf@ibb.unesp.br    pmancera@ibb.unesp.br.

## RESUMO

Métodos numéricos de diferenças finitas de alta ordem para resolver as equações de Navier-Stokes nas formulações função corrente e função corrente-vorticidade são classificados como compactos e não compactos. Neste trabalho, considera-se, na formulação função corrente, a construção de um método compacto de quarta ordem para resolver as equações de Navier-Stokes em malha uniforme e com molécula computacional $5 \times 5$.

Nas últimas décadas nota-se o desenvolvimento de vários métodos numéricos de diferenças finitas para resolver numericamenete as equações de Navier-Stokes, tanto em variáveis primitivas, quanto na formulação função corrente-vorticidade. Na maioria das vezes os métodos usados são de segunda ordem, resultando uma molécula computacional de cinco pontos.

Pode-se obter métodos numéricos de alta ordem para as equações de Navier-Stokes usando diferenças centrais de quarta ordem, porém os mesmos resultam em moléculas computacionais enormes (ver Figura 1), ditos métodos não compactos. Entretanto, é possível obter métodos computacionais com moléculas menores e que ainda sejam de alta ordem, esses métodos são conhecidos como compactos (ver Gupta [1], Mancera & Hunt [2, 3], Pandit et al. [4, 5] e Spotz & Carey [6]).

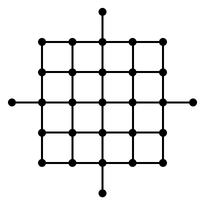

Figura 1: Molécula computacional com 29 pontos

A formulação função corrente das equações de Navier-Stokes estacionárias, em malha uniforme, é dada por

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = Re\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)\right), \tag{1}$$

em que $\psi$ é a função corrente e $Re$ o número de Reynolds.

O procedimento para se construir um método compacto de quarta ordem para a equação (1), é (ver Wittkopf [7]):

1. Aproximar (1) por diferença central de quarta ordem, que resulta numa molécula como a exibida na Figura 1, tendo como *pontos cardeais*:

$$E = \frac{-1}{6\,h^4} + \frac{Re\,DY}{8\,h^3}, \quad W = \frac{-1}{6\,h^4} - \frac{Re\,DY}{8\,h^3},$$

$$N = \frac{-1}{6\,h^4} - \frac{Re\,DX}{8\,h^3}, \quad S = \frac{-1}{6\,h^4} + \frac{Re\,DX}{8\,h^3},$$

com $h$, $DX$ e $DY$, respectivamente, o espaçamento da malha, aproximações de quarta ordem para $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ . Esta aproximação é denotada por $NS_4$.

2. Para eliminar os *pontos cardeais*, resultando em uma molécula $5 \times 5$,
   (a) Calcula-se as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de (1) em relação a $x$ e a $y$.
   (b) Aproxima-se todas as derivadas de ordem superior a dois usando diferença central de segunda ordem, e as outras por diferença central de quarta ordem.

   Estas aproximações são denotadas por $NSx$, $NSxx$, $NSy$ e $NSyy$.

A seguinte expressão

$$NS_4 \quad + \quad h^2 \left( \frac{NS_{xx} + NS_{yy}}{6} + Re \left( \frac{DX\,NS_y - DY\,NS_x}{12} \right) \right) = 0, \tag{2}$$

elimina todos os *pontos cardeais* e resulta num método compacto $5\times5$ de quarta ordem $O(Re^2\,h^4)$ para a equação (1).

Nesse trabalho tem-se como objetivos calcular os erros RMS (*Root Mean Square*) e máximo e a ordem numérica para o método compacto $5 \times 5$ usando três diferentes malhas, uma com o dobro de pontos da outra, comparar esses erros com métodos de diferença central de segunda e quarta ordens e comparar o tempo de CPU dos métodos citados anteriormente, sendo que a geometria considerada é um canal com uma oclusão retangular (tipo estenose), que, embora não seja a melhor representação, é um modelo simplificado em 2D para problemas de obstrução de artérias.

**Palavras-chave**: *Equações de Navier-Stokes, Diferenças Finitas, Métodos Compactos*

# Referências

[1] Gupta, M. M., High accuracy solutions of incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, 93, 343-359, 1991.

[2] Mancera, P. F. A. and Hunt, R., Some experiment with high order compact methods using a computer algebra software - Part I, *Appl. Math. Comput.*, 174, 775-794, 2006.

[3] Mancera, P. F. A. and Hunt, R., Some experiment with high order compact methods using a computer algebra software - Part II, *Appl. Math. Comput.*, 180, 233-241, 2006.

[4] Pandit, S. K., Kalita, J. C. and Dalal, D. C., A transient higher order compact scheme for incompressible viscous flows on geometries beyond rectangular, *J. Comput. Phys.*, 126, 1110-1124, 2007.

[5] Pandit, S. K., Kalita, J. C. and Dalal, D. C., A fourth-order accurate compact scheme for the solution of steady Navier-Stokes equations on non-uniform grids, *Computers and Fluids*, 37, 121-134, 2008.

[6] Spotz, W. F. and Carey, G. F., High-order compact scheme for the steady stream-function vorticity equations, *Int.J. Numer. Meth. Engng.*, 38, 3497-3512, 1995.

[7] Wittkopf. A. High order wide and compact schemes for the steady incompressible Navier-Stokes equations, *Master's thesis, Simon Fraser University*, 1994.