A Subdiferencial de Funcionais Convexos no espaço das Funções Regradas $G([a,b],X)$

Luis Antônio Fernandes de Oliveira **Roseli Arbach**
Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: lafo@mat.feis.unesp.br, roseli@mat.feis.unesp.br

RESUMO

05 Abril 2009

Em [1] introduzimos um funcional convexo dado na forma integral, do tipo Nemytskii, usando a noção de ϕ-convexidade, para $\phi \in BV([a,b],X^*)$, introduzida em [3], e apresentamos condições para sua semicontinuidade inferior. Na sequência, uma ferramenta importante de Análise Convexa no estudo de condições de otimalidade para problemas com restrições de igualdade será abordada: a noção de subdiferencial de um funcional convexo próprio. Consequência imediata é que a subdiferencial $\partial g(x_0)$ da função convexa própria $g : X \to \overline{R}$ em x_0, caracteriza a existência de mínimo global de g sobre X, na medida em que este é atingido se, e somente se, $0 \in \partial g(x_0)$. A questão de quando uma função convexa é subdiferenciável em um ponto dado está ligada com as propriedades da derivada direcional neste ponto. Além disso, a subdiferencial de uma função convexa está relacionada com os conceitos clássicos de derivada de Gateaux ou de Fréchet. Justifica-se assim a investigação do formato da subdiferencial e dos subgradientes do funcional introduzido em [1], relato da qual apresentamos nesta comunicação. O funcional citado acima é

$$L_{\beta,f}[x] = \int_a^b \cdot\, d_s\ \beta(s) \cdot f(s, x(s))\ , \tag{1}$$

sendo $f \in G \cdot Conv_{\beta(s)}([a,b] \times X, X)$ e $\beta \in BV([a,b],X^*)$. O problema abordado aqui é o de investigar condições que garantam a existência de mínimo de (1), sujeito ao do sistema de controle $(K) + (F_\alpha)$ definido pelas equações integrais lineares de Volterra-Stietjes,

$$x(t) - x_0 + \int_a^t \cdot\, d_s\ K(t,s) \cdot x(s) = u(t),\ t \in [a,b] \tag{K}$$

para $a \leq t \leq b$ e $x, u \in G([a,b],X)$, com a restrição linear

$$F_\alpha[x] = \int_a^b \cdot\, d\ \alpha(s) \cdot x(s) = 0 \tag{F_α}$$

sendo as integrais em (1), (K) e (F_α) do tipo Dushnik ou integral interior, e K e α convenientes (ver [1] e [4]). Como usual, denotamos por (x, x^*) a dualidade natural entre $G([a,b],X)$ e $[G([a,b],X)]^*$ determinada pelo funcional bilinear $(\cdot,\cdot) : G([a,b],X) \times [G([a,b],X)]^* \to R$ dado por

$$(x, x^*) = x^*(x)\ ,\ \ \forall x \in G([a,b],X)\ ,\ \ \forall x^* \in [G([a,b],X)]^*$$

A subdiferencial do funcional $\mathcal{L}_{\beta,f} : G([a,b],X) \to (-\infty, +\infty]$, que já sabemos ser convexo e finito, é

$$\partial\mathcal{L}_{\beta,f}[x] = \{x^* \in [G([a,b],X)]^* / \ \mathcal{L}_{\beta,f}(x) - \mathcal{L}_{\beta,f}(u) \leq (x-u, x^*) \ , \forall u \in G([a,b],X)\} =$$

$$= \{x^* \in [G([a,b],X)]^* / \ \int_a^b \cdot \ \beta(s) \cdot [f(s,x(s)) - f(s,u(s))] \leq (x-u,x^*) \ , \ \forall u \in G([a,b],X)\}$$

Os elementos $x^* \in \partial\ \mathcal{L}_{\beta,f}$ são os subgradientes de $\mathcal{L}_{\beta,f}$ em x e $D(\partial\ \mathcal{L}_{\beta,f}) = \{\}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{L}_{\beta,f}$ é subdiferenciável em $x \in D(\partial\ \mathcal{L}_{\beta,f})$. Dois fatos são importantes:

1. $\partial\ \mathcal{L}_{\beta,f}(x)$ é um conjunto convexo fechado.
2. Como $\mathcal{L}_{\beta,f}$ é uma função convexa própria em $G([a,b],X)$, então o mínimo global de $\mathcal{L}_{\beta,f}$ sobre $G([a,b],X)$ é atingido num ponto $x \in G([a,b],X)$ se, e somente se, $0 \in \partial\ \mathcal{L}_{\beta,f}(x)$.

Nota-se que informações sobre $[G([a,b],X)]^*$ são muito importantes para a descrição da subdiferencial do funcional $\mathcal{L}_{\beta,f}$. Se considerarmos o funcional $\mathcal{L}_{\beta,f}$ definido no subespaço $G_-([a,b],X)$, denotado por G_-, podemos descrever a subdiferencial de $\mathcal{L}_{\beta,f}$ de modo mais preciso, levando em conta o teorema de representação 2.10 em [5]. Assim, se $\mathcal{L}_{\beta,f} : G_-([a,b],X) \rightarrow \overline{R}$, então dado $\omega \in [G_-([a,b],X)]^*$, existe $\gamma \in BV_o([a,b],X^*)$, o espaço das funções de variação limitada $g : [a,b] \rightarrow X^*$ com $g(a) = 0$, tal que

$$(x,\omega) = \int_a^b \cdot \ d\gamma(s) \cdot x(s)$$

Assim

$$\partial\mathcal{L}_{\beta,f}[x] = \{\omega \in [G_-]^* / \int_a^b \cdot \ d\beta(s) \cdot [f(s,x(s)) - f(s,u(s))] \leq (x-u,\omega) \ , \ \forall u \in G_-\}$$

$$= \{\gamma \in BV_o([a,b],X^*) / \ \int_a^b \cdot \ d\beta(s) \cdot [f(s,x(s)) - f(s,u(s))] \leq \int_a^b \cdot \ d\gamma(s) \cdot [x(s) - u(s)] \ , \ \forall u \in G_-\}$$

Referências

[1] L.A.O. Fernandes, and R. Arbach, "Lower-semicontinuity and optimization of Convex Functionals", International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 51, No. 2, p. 189-194 (2009).

[2] L.A.O. Fernandes, and R. Arbach, "Semicontinuidade Inferior de Funcionais Convexos no Espaço das Funções Regradas $G([a,b],X)$", XXX CNMAC, Florianópolis, (2007).

[3] L.A.O. Fernandes, "Convex Functionals on the Regulated Function Space $G([a,b],X)$", 49º Seminário Brasileiro de Análise, Campinas, p. 767-772 (1999).

[4] C.S. Hönig, "Volterra-Stieltjes Integral Equations", Math. Studies 16, North Holland Publ. Company, Amsterdam, 1975, 157 p.

[5] C.S. Hönig, "Equations Integrales Generalisées et Applications", Publications Mathematiques D´Orsay, Université de Paris-Sud, Paris, 1981.

[6] V. Barbu, and T. Precupanu, "Convexity and Optimization in Banach Spaces", Sijthoff and Noordhoff, Publishing House of Romanian Academy, Bucharest, 397 p. (1978).

Palavras-chave: *Semicontinuidade Inferior, Funcionais Convexos, Subdiferenciabilidade*