

## Novos Testes Computacionais com a Formulação com Dupla Reciprocidade do Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Dinâmica

**Carlos Friedrich Loeffler**

Depto. de Engenharia Mecânica, PPGEM, UFES  
29075-910, Vitória, ES  
E-mail: [carlosloeffler@bol.com.br](mailto:carlosloeffler@bol.com.br)

**Jeanderson Colodete Sessa**

Depto. de Eletro-Mecânica, IFES  
Cachoeiro do Itapemirim, ES  
E-mail: [jeandersoncs@yahoo.com.br](mailto:jeandersoncs@yahoo.com.br)

**Gustavo Adolfo Vellasquez Castillo**

Centro de Ciências Exatas, UNIOESTE  
Foz do Iguaçu, PR  
E-mail: [gavcastillo@yahoo.com.br](mailto:gavcastillo@yahoo.com.br)

***Resumo:** Este trabalho apresenta e discute os resultados de testes numéricos envolvendo técnicas direcionadas ao aprimoramento da eficácia da formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade, aplicada aos problemas escalares de dinâmica. São examinadas as características dos mais adequados esquemas de avanço no tempo, o efeito do uso de algumas diferentes classes de funções de base radial na interpolação, a eficácia da técnica de acréscimo de funções e os aspectos positivos da introdução de pólos internos. Um exemplo típico com razoável nível de dificuldade para simulação numérica é resolvido, considerando todos os procedimentos citados e seus resultados são comparados e discutidos.*

### Equação de Governo

Considerando-se meios contínuos homogêneos, problemas dinâmicos bidimensionais conservativos, pertinentes à teoria de campo escalar, podem ser matematicamente expressos pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Enquadram-se nessa categoria os casos de propagação de ondas acústicas, solicitações cinéticas axiais e torcionais em barras e outros casos simples da elasticidade linear. Na equação (1)  $u=u(x,y,t)$  designa o potencial,  $c$  é a velocidade de propagação da onda no meio e  $x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas, também designadas variáveis espaciais do campo.

Admitindo-se um domínio físico  $\Omega(X)$ , onde  $X=X(x,y)$ , limitado por um contorno  $\Gamma(X)$ , neste último podem ser impostas, no todo ou em parte, condições do tipo essencial dadas por  $u(X,t) = \bar{u}(X,t)$  em  $\Gamma_u(X)$  ou, então, condições naturais,  $q(X,t) = \partial \bar{u}(X,t) / \partial n$  em  $\Gamma_q(X)$ . A característica dinâmica do problema também requer a imposição de condições iniciais em  $\Omega(x)$ , dadas por  $u(X,0) = u_0(X)$  e  $\partial u(X,0) / \partial t = v_0(X)$ .

## Formulação com Dupla Reciprocidade

Existem formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) cuja estrutura matemática envolve simultaneamente integrações espaciais e temporais, em conformidade com as características de um problema dinâmico. Entretanto, no caso da Formulação com Dupla Reciprocidade (FDR) [8] aproveita-se a simplicidade matemática da formulação estacionária para se resolver os casos dependentes do tempo, conforme procedimento exposto a seguir. Inicialmente, vê-se que no lado esquerdo da equação (1) figura o operador Laplaciano, auto-adjunto, que permite a aplicação dos procedimentos usuais da formulação integral do MEC para problemas estacionários. Assim sendo, empregando-se integração por partes e aplicando-se o Teorema da Divergência, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} \right] u^* d\Omega = C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma \quad (2)$$

A função auxiliar  $u^*(\xi; x)$ , denominada solução fundamental, é a solução de um problema estacionário, com domínio infinito e termo fonte representado por uma função Delta de Dirac em  $X=\xi$ . Sua derivada normal é  $q^*(\xi; x)$  e  $C(\xi)$  é um coeficiente que depende, entre outros fatores, da posição do ponto  $\xi$  com relação ao domínio  $\Omega(X)$  [2]. Para problemas bidimensionais:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; X) \quad (3)$$

Numa segunda etapa, aproxima-se  $\ddot{u}(X,t)$  por uma soma finita composta de um produto de funções, numa forma similar a uma separação de variáveis, onde os  $\ddot{\alpha}^j(t)$  são coeficientes a determinar e as funções  $F^j(X)$  são arbitrárias, mas originadas de primitivas tais que:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \cong \ddot{\alpha}^j \int_{\Omega} F^j u^* d\Omega = \ddot{\alpha}^j \int_{\Omega} \psi_{,ii}^j u^* d\Omega \quad (4)$$

Assim, efetuam-se operações análogas às aquelas realizadas anteriormente, que resultam em:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \cong \ddot{\alpha}^j \left[ -C(\xi)\psi^j(\xi) - \int_{\Gamma} \psi^j q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma \right] \quad (5)$$

Onde:

$$\eta^j = \psi_{,i}^j n_i = \frac{\partial \psi^j}{\partial n} \quad (6)$$

Finalmente, tem-se a forma integral da equação de governo escrita em completamente em termos de integrais de contorno e funções de ponto:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma = \left[ C(\xi)\psi^j(\xi) + \int_{\Gamma} \psi^j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma \right] \frac{\ddot{\alpha}^j(t)}{c^2} \quad (7)$$

Com a discretização do contorno  $\Gamma(x)$  em elementos discretos, o potencial e sua derivada normal, as variáveis auxiliares e a forma geométrica dos elementos, todos são aproximados por funções típicas de interpolação. A equação (7) pode ser escrita para cada elemento de contorno gerando um conjunto de equações que, na forma matricial, escreve-se como:

$$[H] [u] - [G] [q] = \frac{1}{c^2} \left\{ [H] [\psi] - [G] [\eta] \right\} [\ddot{\alpha}] \quad (8)$$

Escolhendo-se um número de funções  $F^j$  igual ao número de nós de discretização, os coeficientes  $\ddot{\alpha}^j(t)$  podem ser substituídos e escritos em termos dos valores nodais de  $\ddot{u}(X,t)$ , de acordo com a equação (4):

$$[\ddot{\alpha}] = [F]^{-1} [\ddot{u}] \quad (9)$$

Substituindo essa última expressão na equação (8), resulta um sistema de equações diferenciais de segunda ordem dado por:

$$[M] [\ddot{u}] + [H] [u] = [G] [q] \quad (10)$$

Resta, portanto, tratar da derivada segunda com relação ao tempo que persiste na equação anterior, o que pode ser feito através de procedimentos de integração incremental, comumente conhecidos como esquemas de avanço no tempo.

### Características dos Esquemas de Avanço no Tempo

O comportamento dos esquemas tradicionais de avanço no tempo no MEC é similar ao observado no Método dos Elementos Finitos [1], havendo, contudo, algumas particularidades bastante importantes. Primeiramente, somente esquemas de avanço incondicionalmente estáveis devem ser usados, pois as condições de estabilidade definidas junto aos métodos de discretização de domínio se alteram quando aplicadas ao MEC. Em segundo lugar, a formulação mista do MEC exige a utilização de esquemas portadores de amortecimento fictício, capazes de filtrar a presença de modos elevados mal caracterizados, que se amplificam na determinação das derivadas do potencial [4]. Nos casos mais comuns da dinâmica estrutural, os modos mais altos não participam da solução e sua eliminação em nada prejudica a resposta. O problema passa a ser crítico quando a resposta de fato possui um conteúdo modal mais elevado, como nos casos transientes relacionados ao impacto e à propagação de ondas [7], pois a inclusão de excessivo amortecimento acarreta diminuição na precisão das respostas. É preciso, então, avaliar a intensidade de amortecimento presente em cada esquema de avanço para que não haja degradação da solução numérica. Em terceiro lugar, a FDR gera uma matriz de massa, expressa na equação (10), através do uso de funções de interpolação auxiliares, que introduzem uma nova fonte de erro, impondo um limite mínimo de incremento de tempo, ou seja, para passos menores do que esse valor, o esquema incremental é instável.

Uma série de testes envolvendo problemas de impacto em barras identificou inicialmente o esquema Houbolt como mais indicado dentre os mais tradicionais [6], dentre os quais se incluem os algoritmos de Newmark e Diferença Central Incondicionalmente Estável. Posteriormente, foram testados outros esquemas como os de Wilson- $\theta$ , de Chung-Lee e HHT- $\alpha$ , este último uma adaptação do algoritmo de Newmark. [3]. Esses últimos esquemas apresentam como característica interessante o controle da quantidade de amortecimento numérico através de um parâmetro específico, independente do valor do passo de integração. O esquema de Chung-Lee caracterizou-se por introduzir altas taxas de amortecimento fictício, enquanto o esquema HHT- $\alpha$  permitiu o emprego de passos bem maiores do que aqueles permitidos nos outros algoritmos, o que permitiria considerável economia computacional, não fossem as excessivas oscilações resultantes de taxas insuficientes de amortecimento fictício. O esquema Wilson- $\theta$  foi o que melhor permitiu a introdução da dosagem adequada de amortecimento de modo mais eficaz. As simulações mostraram que a maior flexibilidade na inclusão de amortecimento permitiu a integração com o esquema Wilson- $\theta$  usando intervalos de tempo menores, embora esses resultados não sejam os mais precisos, como será exposto a seguir.

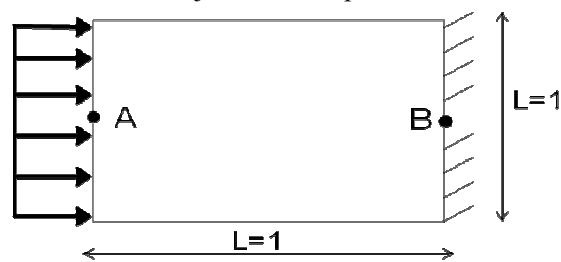


Figura 1 – Problema teste: barra de seção constante engastada e submetida à carga súbita.

A comparação de desempenho entre esses dois esquemas é agora examinada, considerando o problema de impacto numa barra homogênea de seção constante, caso típico de propagação de ondas longitudinais, vide figura 1. Nesse caso o potencial corresponde ao deslocamento longitudinal enquanto a derivada normal associa-se as tensões axiais. Há excitação de um infinito número de modos naturais, cuja participação na resposta traz dificuldades à sua representação numérica, tornando-o um importante problema-teste.

A resposta numérica para o deslocamento no ponto A é bastante precisa qualquer sejam os esquemas de avanço empregados, mas o mesmo não ocorre na determinação das tensões, cujos valores no ponto B, situado no engaste, devem ser melhor examinados.

Na figura 2a são apresentadas tais respostas de tensão em três simulações com o esquema Wilson nas quais foi testado o efeito do parâmetro  $\theta$ , empregando-se uma malha de 80 elementos constantes, 25 pontos internos interpolantes e incremento de integração  $\Delta t$  igual a 0,05s. Com esse nível de refinamento, apenas valores de  $\theta$  iguais ou superiores a 1,7 apresentaram comportamento estável, enquanto valores iguais ou menores do que esses divergiram. As curvas de resposta mais precisas são obtidas com  $\theta$  igual a 1,8. Valores elevados, como no caso da curva com  $\theta=3$ , produzem suavização e amplificação do período da resposta, efeito do excesso de amortecimento fictício. Há uma faixa de valores ideais para  $\theta$ , próxima do valor mínimo estável, que rigorosamente depende do refinamento da malha. Os resultados para tensão no engaste empregando  $\theta$  igual a 1,7 e 2,0 são mostrados no gráfico da figura 2b.

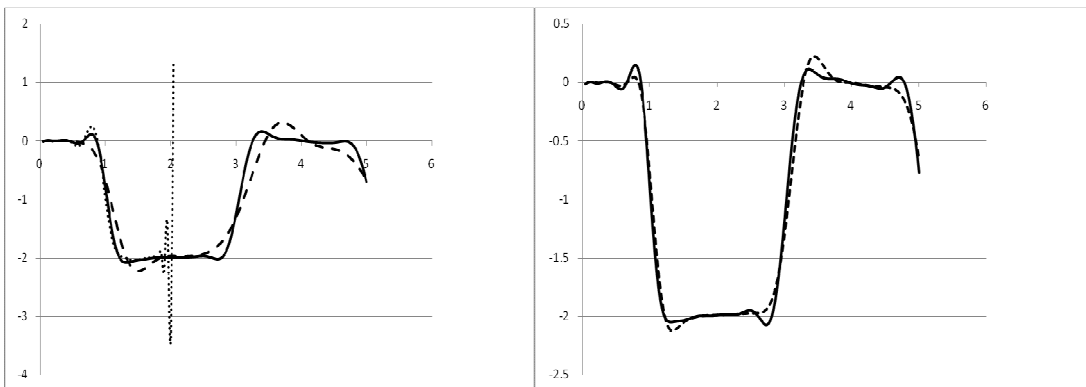


Figura 2a – Efeito do parâmetro  $\theta$  na resposta para tensões, com valores de  $\theta=1,5$  (curva pontilhada),  $\theta=1,8$  (curva contínua) e  $\theta=3$  (curva tracejada). Figura 2b – Resposta para tensões com  $\theta=1,7$  (curva contínua) e  $\theta=2,0$  (curva tracejada).

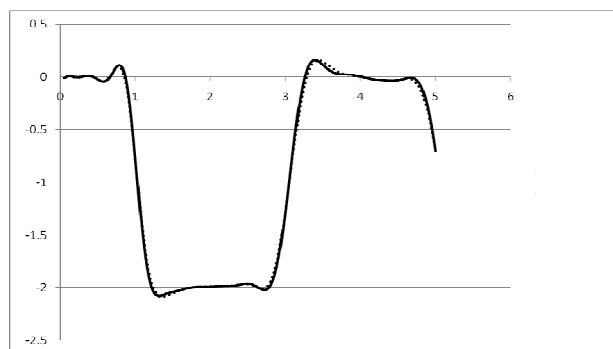


Figura 3 – Comparação das curvas de resposta para tensão com os esquemas Wilson e Houbolt.

Na figura 3 comparam-se os resultados numéricos do esquema Houbolt e Wilson- $\theta$ , empregando-se uma malha com 80 elementos de contorno, 25 pontos internos interpolantes e intervalo de integração  $\Delta t=0.05s$ . O parâmetro  $\theta$  foi tomado igual a 1,8 - valor situado dentro da

faixa de melhor desempenho. Ressalta-se a similaridade dos resultados, não havendo diferença significativa entre ambos. Esperava-se ao empregar um número mais restrito de instantes de equilíbrio, que o esquema Wilson- $\theta$  oferecesse resultados em que a chegada e a saída da frente de onda no engaste se apresentassem sensivelmente mais verticalizadas do que no esquema Houbolt, mas o que se observou nesse sentido foi um efeito muito tênue. A ampliação da faixa de integração com o esquema Wilson- $\theta$ , permitindo o emprego de passos de integração menores, não resultou em melhoria de desempenho, pois se identificou que isso é possível apenas para valores de  $\theta$  elevados, que introduzem altas taxas de amortecimento fictício. Desse modo, é bastante questionável considerar-se como vantajosa a introdução do parâmetro  $\theta$  como variável de controle do amortecimento numérico. Diante da similaridade dos resultados, talvez seja mais interessante optar-se pela simplicidade do esquema Houbolt e fazer o controle da taxa de amortecimento somente pela magnitude do incremento de integração.

### Pontos Internos Interpolantes

Apesar do desempenho e algumas estratégias empregadas em alguns casos específicos, o procedimento mais geral e eficaz para melhorar o desempenho da FDR consiste na introdução adequada de pontos adicionais de interpolação no interior do domínio, comumente chamados de pólos. A importância da sua introdução nas modelagens dinâmicas podem ser conferidas na figura 4, na qual são comparadas as respostas de tensão numa malha com 80 elementos de contorno constantes, com diferentes quantidades de pólos. Deve-se ressaltar que a quantidade desses deve ser uma fração da quantidade de elementos de contorno usados e que o passo de integração mais adequado também se reduz.

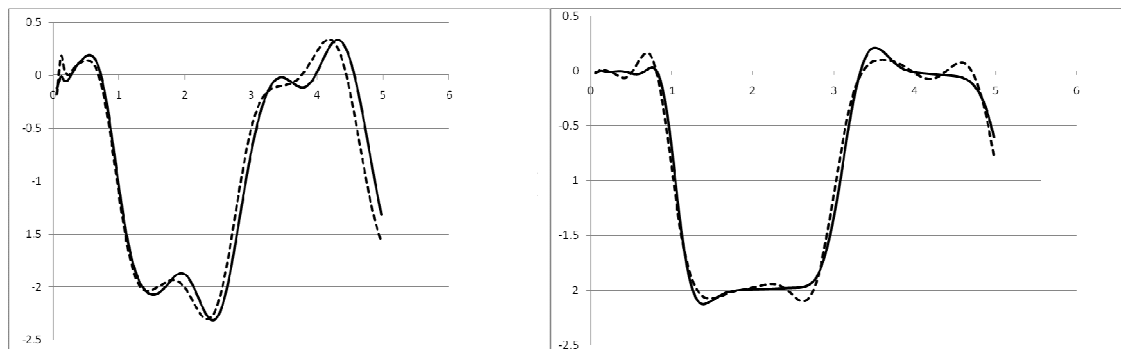


Figura 4 – Respostas para tensões no engaste. Malhas com 80 elementos,  $\Delta t=0,06s$ . Gráfico à esquerda: sem pólos (curva pontilhada); um polo central (linha contínua). Gráfico à direita: 9 pólos (linha pontilhada); 25 pólos (linha contínua).

### Escolha das Funções de Interpolação

O cerne da FDR consiste da aproximação expressa pela equação (8), onde se interpola o potencial  $u(X,t)$  através de uma combinação linear de funções arbitrárias  $F^j(X)$ . Comumente são escolhidas funções de base radial com esse propósito e existem várias opções na literatura, como as funções radiais simples, cúbicas, spline-plate, multiquádricas, gaussianas etc. Muitos trabalhos já foram publicados advogando a supremacia de certas funções sobre outras; mas, na realidade, isso depende especialmente do tipo de aplicação, embora o tipo de condição de contorno, a forma do contorno e a distribuição dos dados a serem aproximados também tenham sua influência. No que tange à dinâmica com a FDR, tais testes com diversas funções de interpolação não foram devidamente realizados. Por exemplo, usando-se elementos de contorno constantes, as funções radiais cúbicas ( $F^j=r^3$ ) produziram resultados totalmente instáveis, embora tenham excelente desempenho no cálculo de volumes e outras aplicações em problemas estacionários. Também a conhecida função Spline-plate ( $F^j=r^2 \ln r$ ) somente apresentou

estabilidade numa restrita faixa de passos de integração, enquanto a função radial simples ( $F^j=r$ ) teve o melhor desempenho. Uma possível explicação para esse comportamento das funções na dinâmica se deve ao fato de que a massa do sistema estaria sendo bem representada em nível global por todas as funções citadas, mas localmente estariam sendo introduzidas heterogeneidades acentuadas por algumas delas, que dispersariam as frentes de onda em sua propagação, dando origem a uma elevada sensibilidade numérica.

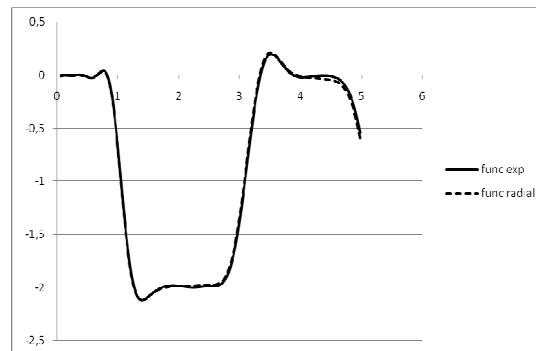


Figura 5 – Comparação das curvas de resposta para tensão entre as funções radial simples ( $F^j=r$ ) e exponencial híbrida  $F^j = e^{-r}(r^2 - 5r + 4)$ , com intervalo de integração igual a 0,06s.

Na figura 5 apresenta-se a curva de tensão obtida no engaste da barra sob carga de impacto, usando-se funções radiais simples ( $F^j=r$ ) e funções exponenciais híbridas  $F^j = e^{-r}(r^2 - 5r + 4)$  que foram das poucas que apresentaram bons resultados. Empregou-se uma malha com 80 elementos de contorno constantes e 25 pontos internos interpolantes nessas simulações.

Os resultados são muito semelhantes quanto à precisão, mas a função exponencial híbrida produziu resultados estáveis com menores valores do passo de integração e a instabilidade da solução não ocorreu subitamente, tal como é observado com a função radial simples. Na figura 6, considerando funções exponenciais híbridas, é mostrado o efeito da redução do passo de integração produzindo aumento das oscilações provenientes dos altos modos não amortecidos. A função radial simples foi instável para passos menores do que 0,06s.

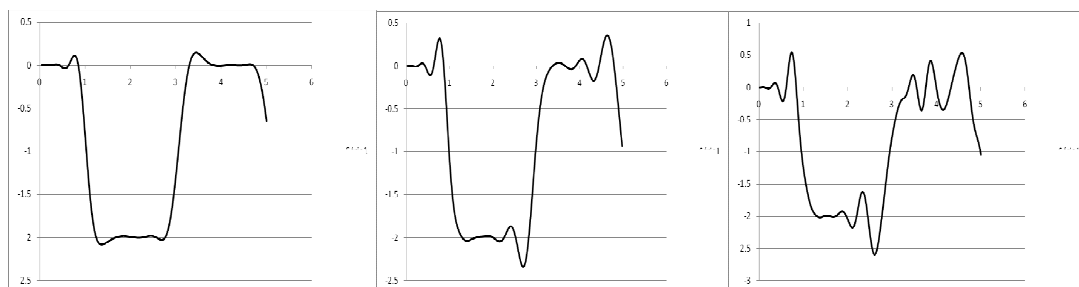


Figura 6 – Efeito da redução do passo com funções exponenciais híbridas. Malhas com 80 elementos constantes, 25 pólos e  $\Delta t=0.05s$  (esquerda),  $\Delta t=0.03s$  (centro) e  $\Delta t=0.01s$  (direita).

### Funções Acrescidas

Existem táticas nas quais se procura combinar o efeito de diferentes funções sem fazer uma simples soma direta. Há um relativo êxito em certas aplicações estacionárias. Um bom exemplo é o esquema proposto por Goldberg e Chen [5], em que testes provaram que há um considerável aumento de precisão quando um conjunto de funções  $F^j=(1,x,y)$  é acrescido a um conjunto de funções radiais simples ou cúbicas. Todavia, quando o mesmo esquema é testado no problema do impacto na barra, a sua resposta é inferior à obtida com acréscimo de pontos internos interpolantes, conforme mostra a figura 7. A faixa de integração é igualmente reduzida.

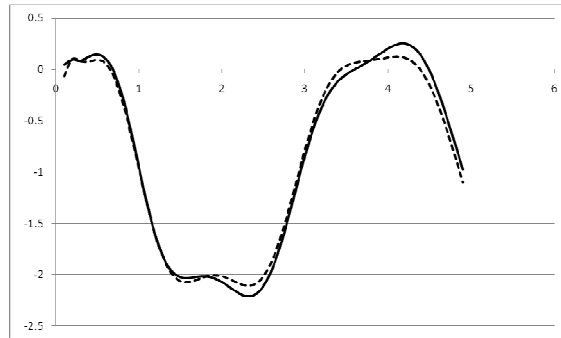


Figura 7 – Comparação na resposta de tensões obtida com o esquema de acréscimo de funções (linha contínua) e esquema tradicional com um ponto interno centralizado (linha tracejada). Malhas com 40 elementos constantes e  $\Delta t=0.1s$ .

## Conclusões

Na FDR existem dificuldades no controle numérico das vibrações espúrias produzidas pelos altos modos da resposta no cálculo das tensões. Utilizando-se técnicas incrementais é necessária a utilização de esquemas incondicionalmente estáveis com amortecimento fictício. Dos mais conhecidos esquemas, Houbolt e Wilson- $\theta$  oferecem resultados razoáveis, com precisão semelhante. Apesar da flexibilidade desse último no controle da quantidade de amortecimento, esta característica não oferece vantagem efetiva na precisão dos resultados. Outro problema grave da FDR em dinâmica é o erro cometido pelas funções de interpolação na representação das propriedades de inércia, que modifica a estabilidade dos esquemas de avanço no tempo e impede o emprego de passos reduzidos. Portanto, a melhoria na constituição da inércia é fundamental. Entre as estratégias disponíveis para melhorar o desempenho encontram-se a introdução de pólos e a identificação de uma função de interpolação mais adequada. A função exponencial aqui apresentada, embora não apresente melhora sensível na precisão dos resultados permitiu a redução do tempo mínimo requerido para solução estável, o que é significativo. Por fim, verifica-se que procedimentos eficazes na FDR na solução de problemas estacionários não oferecem respostas precisas em problemas de propagação de ondas.

## Referências

1. Bathe, K.J. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, USA, 1982.
2. Brebbia, C.A. "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London, 1978.
3. Castillo, G.A.V., Loeffler, C.F., Performance Evaluation of Some New Time Integration Methods in Elastodynamic Problems Formulated by Dual Reciprocity Boundary Element Method, Proceedings of XXV BEM, pp. 329-338, Split, Croatia, (2003).
4. Clough, R.W., Penzien J., "Dynamic of Structures", McGraw-Hill Kogakuscha, Tokyo, 1975.
5. Goldberg, M.A., Chen C.S., The Theory of radial Basis Function applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential Equations, Boundary Element Comm. 5 pp.57-61, (1994).
6. Loeffler, C.F., Mansur, W.J., Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems, in "Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer", Computational Mechanics Pub., pp.105-124, (1987).
7. Loeffler, C. F., Nogueira, F. C., Resposta Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno Utilizando Superposição Modal, Revista Militar de Ciência e Tecnologia, vol. 8, nº 1, pp. 36 – 49, (1991).
8. Partridge, P. W., Brebbia, C. A., Wrobel ,L. C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", CMP, USA, 1992.