 ISSN 1984-820X

Construção de frações contínuas associadas a séries de potências

Eliana X. L. de Andrade **Manuella A. F. de Lima***
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: eliana@ibilce.com.br, manuella_felix@hotmail.com

RESUMO

Introdução: Seja $f(z)$ uma função analítica cujas expansões em séries de potências em $z = 0$ e $z = \infty$ são dadas, respectivamente, por:

$$a)\ f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{e} \quad b)\ f(z) = -\frac{a_{-1}}{z} - \frac{a_{-2}}{z^2} - \frac{a_{-3}}{z^3} - \cdots, \tag{1}$$

com $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Suponhamos, ainda, que $f(z)$ tenha o seguinte desenvolvimento em frações contínuas:

$$f(z) = \frac{n_1}{1 + d_1 z} + \frac{n_2 z}{1 + d_2 z} + \ldots + \frac{n_m z}{1 + d_m z} + \ldots, \tag{2}$$

onde n_i e d_i, $i = 1, 2, \ldots$, são constantes independentes de z. Se $C_m(z) = \dfrac{P_m^{(1)}(z)}{P_m^{(2)}(z)}$ é o m-ésimo convergente (ou aproximante) da fração contínua (2), então podemos considerar a sequência $C_m(z)$, $m = 0, 1, \ldots$, como aproximações da função $f(z)$.

Neste trabalho, estudamos como obter os coeficientes da fração contínua (2) a partir dos coeficientes a_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, das expansões em séries de potências em dois pontos ($z = 0$ e $z = \infty$) (1) de uma função $f(z)$. As principais referências são os artigos [3] e [1]. Em [3] os autores derivaram fórmulas para o cálculo dos coeficientes da fração contínua em termos de razões entre determinantes construídos a partir dos coeficientes das expansões (1) de $f(z)$. Em [1], é apresentado uma modificação do método dado em [3] para que seja possível utilizar o algoritmo Q-D de Rutishauser [4] para o caso em que existem coeficientes nulos em (1) . Alguns exemplos são dados.

Construção das frações contínuas: Primeiramente, aproximamos $f(z)$ por uma função racional da forma

$$f_{i,j}(z) = \frac{\alpha_{m,0} + \alpha_{m,1} z + \cdots + \alpha_{m,m} z^{m-1}}{1 + \beta_{m,1} z + \cdots + \beta_{m,m} z^m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

cujos coeficientes $\alpha_{m,i}$ e $\beta_{m,i}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, são tais que quando expandimos $f_{i,j}(z)$ em séries de potências em z e em $\frac{1}{z}$, haja coincidência, respectivamente, com os i primeiros termos de (1) $a)$ e com os j primeiros termos de (1) $b)$, totalizando $i + j = 2m$ termos. Assim,

$$f(z) - f_{i,j}(z) = O\left(z^i, z^{-(j+1)}\right). \tag{4}$$

*bolsista de Mestrado CAPES

Se tomarmos $P_m^{(1)}(z) = \alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}z + \cdots + \alpha_{m,m-1}z^{m-1}$ e $P_m^{(2)}(z) = 1 + \beta_{m,1}z + \cdots + \beta_{m,m}z^m$, então $f_{i,j}(z) = C_m(z),\ \ i+j = 2m,\ \ m = 1,2,3,\ldots.$

Em [3] demonstrou-se que, quando $i = j = m$,

$$n_{m+1} = \frac{D_{0,m}D_{-1,m-2}}{D_{-1,m-1}D_{0,m-1}} \quad \text{e} \quad d_{m+1} = -\frac{D_{0,m}D_{-1,m-1}}{D_{-1,m}D_{0,m-1}}, \quad m = 0,1,2,3,\ldots, \tag{5}$$

onde $D_{r,s} := \begin{vmatrix} a_r & \cdots & a_{r+s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-s} & \cdots & a_r \end{vmatrix}$, $r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $s = 0,1,2,\ldots$ e $D_{r,s} := 1$ se $s < 0$.

No caso em que $i \neq j$, podemos construir a fração contínua usando um método muito semelhante ao usado acima para $i = j = m$. Como, nas aproximações por funções racionais, temos um número par de parâmetros, consideramos os da forma $f_{m+2r,m}(z)$, $r = 0,1,2,\ldots$. Então, tomamos a sequência $f_{1,1}(z), f_{2,2}(z) \ldots, f_{m,m}(z), f_{m+1,m-1}(z), f_{m+2,m}(z), \ldots, f_{m+2r-1,m-1}(z), f_{m+2r,m}(z), \ldots$, para $r = 1,2,3,\ldots$, que são os convergentes da fração contínua

$$\frac{n_1}{1+d_1z} + \frac{n_2z}{1+d_2z} + \ldots + \frac{n_mz}{1+d_mz} + \frac{n_{m+1}z}{1} + \frac{n_{m+2}z}{1} + \ldots,$$

com n_r e d_r, $r = 1,2,\ldots,m$, dados por (5) e

$$n_{m+2r-1} = \frac{D_{r-1,m+r-1}D_{r-2,m+r-3}}{D_{r-2,m+r-2}D_{r-1,m+r-2}}, \quad d_{m+2r} = -\frac{D_{r,m+r-1}D_{r-2,m+r-2}}{D_{r-1,m+r-2}D_{r-1,m+r-1}}.$$

Para se obter os coeficientes n_r e d_r, $r = 1,2,\ldots$, podemos calcular diretamente o valor dos determinantes $D_{r,s}$. Alternativamente, se $a_i \neq 0$, $i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, a fração contínua pode ser obtida por meio das relações de recorrência

$$n_i^{(r)} = d_{i-1}^{(r+1)} + n_{i-1}^{(r+1)} - d_{i-1}^{(r)} \quad \text{e} \quad d_i^{(r)} = \frac{n_i^{(r)}d_{i-1}^{(r-1)}}{n_i^{(r-1)}}$$

para $r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ e $i = 2,3,4,\ldots$, e com os valores iniciais $n_1^{(r)} = 0$ e $d_1^{(r)} = \dfrac{a_r}{a_{r-1}}$ para $r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Este é o algoritmo Q-D. (veja Rutishauser [4].)

Portanto, se houver coeficientes nulos em (1), não podemos aplicar diretamente o algoritmo Q-D. Em [1], os autores apresentaram uma modificação do algoritmo dado por McCabe e Murphy em [3] para a construção dos coeficientes da fração contínua (2), mesmo quando existirem coeficientes nulos nas expansões em séries de potências de $f(z)$. Mais precisamente, os autores consideraram a função $g(z) = f(z) - K/(1+z)$, cujas expansões em séries de potências não apresentam coeficientes nulos. A partir daí, obtiveram relações entre os coeficientes das frações contínuas correspondentes a $f(z)$ e $g(z)$.

Referências

[1] E.X.L. Andrade, J.H. McCabe and A.S. Ranga, The Q-D algorithm for transforming series expansions into a corresponding continued fraction: An extension to cope with zero coefficients, *J. Comput. Appl. Math.*, 156(2) (2003) 487-497.

[2] L. Lorentzen and H. Waadeland, "Continued Fractions with Applications", Studies in Computational Mathematics, Amsterdam, 1992.

[3] J.H. McCabe and J.A. Murphy, Continued fractions which correspond to power series expansions at two points, *J. I. Math. Appl.*, 17(2) (1971) 233-247.

[4] H. Rutishauser, Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Z.A.M.P.*, 5 (1954) 233-251.